



Redeneren en formuleren bij wiskundevakken

Een vakspecifieke uitwerking van taalgericht vakonderwijs

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling



Redeneren en formuleren bij wiskundevakken

Een vakspecifieke uitwerking van taalgericht vakonderwijs

April 2018

slo

nationaal
expertisecentrum
leerplan-
ontwikkeling

Verantwoording

2018 SLO (nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling), Enschede

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze dan ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Auteurs: Jos Tolboom, Monica Wijers (Freudenthal Instituut), Bart van der Leeuw, Theun Meestringa

Informatie

SLO

Afdeling: tweede fase

Postbus 2041, 7500 CA Enschede

Telefoon (053) 4840 840

Internet: www.slo.nl

E-mail: info@slo.nl

AN: 3.7777.749

Inhoud

| | |
|--|-----------|
| Inleiding | 5 |
| 1. Een taalkundige kijk op vaktaal | 7 |
| 1.1 Van dagelijkse taal naar academische taal | 7 |
| 1.2 Tekstdoelen (genres) en redeneerwijzen in het voortgezet onderwijs | 10 |
| 2. Wiskundige denkactiviteiten met de genres Procedure en Verslag | 13 |
| 2.1 De Procedure | 13 |
| 2.2 Het Verslag | 16 |
| 2.3 Toepassing bij wiskundevakken | 17 |
| 3. Vaktaal leren gebruiken | 19 |
| 3.1 Kerndoelen en eindtermen | 19 |
| 3.2 Leren werken met grafieken: een Procedure in 1 mavo/havo | 22 |
| 3.3 De achthoek: een Procedure in 3 vwo | 24 |
| 3.4 Het verpakkingsvraagstuk: een Procedure in de bovenbouw | 25 |
| 3.5 Leren werken met grafieken: een Verslag in 1 vmbo | 26 |
| 3.6 De achthoek: een Verslag in 3 vwo | 28 |
| 4. Suggesties voor de praktijk | 31 |
| 4.1 Aandacht voor formuleren in de klas | 31 |
| 4.2 De onderwijsleercyclus | 34 |
| 4.3 Naar een samenhangend curriculum | 35 |
| Referenties | 37 |
| Bijlage Veelvoorkomende genres | 39 |

Inleiding

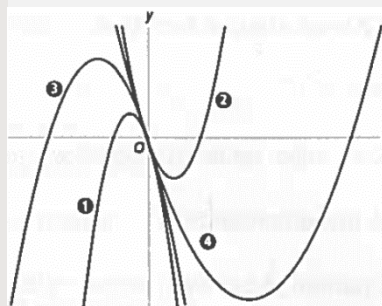
Waarom deze brochure?

Een proefwerk wiskunde in 3 vwo bevat de volgende opdracht:

Opgave 3 (18p)

Gegeven is de familie van functies $f(x) = ax^2 - 3x$

- (...)
- De vier grafieken hebben één punt gemeenschappelijk. Leid dit af uit het functievoorschrift.
- (...)



Leerlingen gaven onder meer de volgende antwoorden:

- dit is een $y=ax^2-bx-c$ functie, echter staat de c er niet wat betekent dat de c 0 is en dus gaan alle grafieken door 0*
- er zit overal in de formule een x dus als je 0 invult voor x komt er ook altijd 0 uit die punt $(0,0)$ hebben ze dus allemaal gemeen*
- Ja, in het functievoorschrift staat geen c , dit betekent dat het snijpunt met de y -as 0 is, als er geen c in de formule staat, gaat de parabool door de oorsprong. Alle grafieken uit deze opdracht gaan dus door het punt $(0,0)$*

Deze antwoorden zijn allemaal goed gerekend, de redeneringen zijn – op dit niveau – wiskundig immers correct. Geen enkele formulering is echter helemaal in orde. Dit illustreert een algemener probleem in het onderwijs in de wiskundevakken, namelijk dat voor alle leerlingen de taal van een schoolvak eigenlijk een nieuwe taal is die geleerd moet worden. Dat geldt voor de **receptieve** beheersing van die taal (lezen en luisteren), maar vooral voor de **productieve** beheersing: zelf vakmatige redeneringen formuleren (spreken en schrijven) is moeilijk en vergt van leerlingen inspanning in een langdurig leerproces.

Deze brochure biedt leraren handvatten voor de ondersteuning van dat leerproces door middel van een doordachte vaktaaldidactiek. Hij is bedoeld voor leraren (in opleiding), taalcoördinatoren, lerarenopleiders en onderwijsadviseurs op het terrein van de wiskundevakken.

Wat houdt ondersteuning van vakmatig redeneren in?

De drie pijlers van taalgericht vakonderwijs (Hajer & Meestringa, 2015) die samen effectieve vaktaaldidactiek mogelijk maken zijn de volgende.

- context.** Vakkennis wordt aangeboden in herkenbare contexten.
- interactie.** Leerlingen worden gestimuleerd om over vakconcepten te spreken en te schrijven.
- taalsteun.** De leraar biedt actief ondersteuning bij het verwerven van de correcte vaktaal.

Context en **interactie** blijken in de lespraktijk redelijk eenvoudig te realiseren. Voor **taalsteun** is dat lastiger, vooral omdat er geen pasklaar, vakoverstijgend recept is te geven voor hoe je leerlingen bijvoorbeeld leert een redenering vakmatig te formuleren. We kunnen wel een belangrijke – en eigenlijk voor de hand liggende – voorwaarde noemen: om de specifieke kenmerken van de vaktaal aan zijn leerlingen duidelijk te maken, moet de leraar daar op de eerste plaats zelf een goed inzicht in hebben. Want hoe kan hij anders zijn leerlingen ondersteunen bij de ontwikkeling van die vaktaal?

Daaruit volgt ook meteen het tweeledig doel van deze brochure:

1. **Inzicht geven** in taalkenmerken van het vakmatig redeneren van het eigen vak.
2. **Praktische handvatten aanreiken** om met deze inzichten leerlingen te ondersteunen in het beter leren gebruiken van de vaktaal.

Voor dat doel presenteren we enkele taalkundige begrippen die een specifieke kijk op teksten in wiskundevakken mogelijk maken. Want zoals wiskundigen specifieke begrippen nodig hebben om de wereld van meetkunde, getallen, grafieken, formules en modellen te beschrijven en te begrijpen, zo zijn taalkundige begrippen nodig voor de beschrijving en analyse van vaktaal in vakteksten.

Inhoud van deze brochure

De hoofdstukken 1-4 komt het volgende aan bod.

1. **Een taalkundige kijk op vakteksten**
Eerste hoofdstuk waarin het begrippenapparaat wordt geïntroduceerd. We leggen uit wat welke aspecten we aan vaktaal kunnen onderscheiden en welke redeneerwijzen (**genres**) specifiek zijn voor de wiskundevakken.
2. **Wiskundige denkactiviteiten met de genres Procedure en Verslag**
In dit hoofdstuk zien we wat kenmerkend is voor twee belangrijke genres bij de wiskundevakken en welke taalmiddelen (woorden en zinnen) daarin veelal worden gehanteerd.
3. **Vaktaal leren gebruiken**
We gaan na wat in de kerndoelen en eindtermen is geformuleerd over de ontwikkeling van de vaktaal om over wiskunde te spreken en schrijven. Vervolgens kijken we hoe dit terugkomt in de schoolboeken en in gesprekken met leerlingen.
4. **Suggesties voor de praktijk**
In dit laatste hoofdstuk werken we uit hoe je de inzichten uit de voorgaande hoofdstukken kunt vertalen naar effectief didactisch handelen: hoe kun je taalsteun bieden aan leerlingen die zich het vak en de vaktaal proberen eigen te maken?

Interdisciplinaire samenwerking

De brochure is het resultaat van een intensieve samenwerking tussen leraren, vakexperts uit de wiskunde en taalexperts. De reden van die samenwerking is natuurlijk dat al deze partijen relevante expertise leveren. Een soortgelijke interdisciplinaire samenwerking is ook een voorwaarde voor een succesvolle implementatie van de in deze brochure gepresenteerde aanpak.

Voor een aanpak in het kader van taalbeleid in het curriculum over de vakken heen zijn naast deze brochure voor de wiskundevakken ook brochures geschreven over redeneren en formuleren bij de kunstvakken, de mens- en maatschappijvakken, de natuurwetenschappelijke vakken en bij Nederlands. Aan het slot van het volgende hoofdstuk komen we hierop kort terug.

1. Een taalkundige kijk op vaktaal

Wiskundeonderwijs is erop gericht dat leerlingen vanuit fascinatie en verwondering begrip ontwikkelen voor wiskundige objecten – zoals getallen, formules, grafieken, meetkundige vormen en figuren –, hun eigenschappen en onderlinge relaties en de mogelijke wiskundige bewerkingen die erop zijn uit te voeren. Die objecten, eigenschappen, relaties en bewerkingen worden gerepresenteerd met behulp van taal, waaronder symbolen en afbeeldingen. Leerlingen ontwikkelen begrip **receptief** door bijvoorbeeld in een wiskundeboek te lezen, of naar een uitleg van de wiskundeleraar te luisteren. Om vervolgens dat begrip met anderen te kunnen delen (als ze bijvoorbeeld in de klas een vraag willen stellen over iets dat ze niet begrijpen, in groepjes moeten overleggen of toetsvragen moeten beantwoorden) moeten ze daar ook **productief** over kunnen communiceren: ze moeten kunnen spreken en schrijven over wat ze door observatie en manipulatie in verschillende contexten zien en doen. Zo wordt in het vakonderwijs een steeds groter beroep gedaan op de **productieve** beheersing van de **vaktaal** van leerlingen: het onderwijs vraagt van hen door de jaren heen een steeds specialistischer beheersing van vakmatig redeneren en formuleren.

1.1 Van dagelijkse taal naar academische taal

Het ontwikkelen van vaktaal gaat samen met het langzamerhand verkennen en ontdekken van de wereld. Vanuit de taal en het begrip op dat moment zetten leerlingen – ondersteund door hun leraren – stapjes in de richting van een meer abstracte, schoolse manier van denken en praten. In de taalwetenschap zegt men: hun taal ontwikkelt zich van **Dagelijkse Algemene Taalvaardigheid (DAT)** naar **Cognitieve Academische Taalvaardigheid (CAT)**. Dit is een geleidelijk proces dat jaren vergt. Tijdens dat proces leert een leerling veel meer woorden en zinnen (taalmiddelen) dan strikt noodzakelijk zijn in het dagelijks sociale verkeer. Met deze nieuwe CAT-woorden en –zinnen ontwikkelt hij het vermogen om op een meer academische en vakmatige manier over de, in dit geval, wiskunde te kunnen denken en praten.

Taal die specifiek is voor een bepaalde context of eigen is aan een bepaalde praktijk van vakmensen noemen we een **register** of **vaktaal**. Om zich dat register eigen te maken, hebben leerlingen in het algemeen expliciete ondersteuning nodig van hun leraar. Die moet zich op zijn beurt bewust zijn van de kenmerken van dat register en daarover met zijn leerlingen kunnen praten. Wat zijn die kenmerken? Om daar antwoord op te geven kijken we steeds naar vier aspecten van een vaktekst.

Talige aspecten van een vaktekst



Deze vier aspecten lichten we toe aan de hand van onderstaande uitleg over lineaire formules, afkomstig uit een wiskundeboek voor de tweede klas (*Moderne wiskunde, 2A, havo/vwo deel 1*, 2013, p. 14; Zie ook Van der Leeuw & Meestringa, 2014, p.153-163). Het is het begin van een paragraaf. Dit fragment bestaat uit woorden, cijfers, afbeeldingen, afkortingen, symbolen, formules, een tabel en een grafiek.

| Doel | 1-3 Lineaire formules maken | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|---|---------------|---|---|---|---|---|---|---|-------------------|--|--|--|--|--|--|
| Benodigd materiaal (Beschrijving) | Het gewicht dat aan een veer hangt bepaalt de lengte van de veer. Een veer heeft de lengte van 10 cm als er geen gewicht aan hangt. Als je een gewicht van 6 kg aan die veer hangt, dan wordt de veer 28 cm lang. Bij elke kg die aan de veer gehangen wordt, neemt de lengte evenveel cm toe. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Instructie | Vul onderstaande tabel in. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Ben. materiaal (tabel) | <table border="1"> <thead> <tr> <th>gewicht in kg</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>lengte veer in cm</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | | gewicht in kg | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | lengte veer in cm | | | | | | |
| gewicht in kg | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | |
| lengte veer in cm | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Instructie Ben. materiaal (beschrijving) | Schrijf bij deze tabel het startgetal en het hellingsgetal op. De formule voor het verband tussen het gewicht g in kg en de lengte l in cm heeft de vorm $l = \dots g + \dots$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Instructie | Maak de formule af. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Ben. materiaal (Beschrijving) | De lineaire grafiek hiernaast geeft het verband weer tussen de variabelen x en y . | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Instructie | Lees op de verticale as het startgetal af. Je kunt de waarde van y bij $x = 40$ precies aflezen. Welke waarde van y hoort bij $x = 40$? Met hoeveel neemt y toe als x met 40 toeneemt? En met hoeveel als x met één toeneemt? Hoe groot is dus het hellingsgetal? Neem de formule $y = \dots x + \dots$ over en maak deze af. | | | | | | | | | | | | | | | | |

Om een doel te bereiken doorloopt de tekst twee of meer Stadia

Het sociale doel van deze tekst is leerlingen te **instrueren** hoe je gegevens uit de werkelijkheid, in dit geval uit een natuurkundige proef, om kunt zetten in een tabel of grafiek en een bijbehorende formule. Eerst gebeurt dit aan de hand van een concreet voorbeeld, daarna abstract op basis van een grafiek. Op 'doelen' van teksten komen we later in deze paragraaf nog terug. Om dit doel te

bereiken kent zo'n instruerende tekst (of Procedure) doorgaans drie stadia: **Doel** ^ **Benodigd materiaal** ^ **Stapsgewijze instructie**.

Het doel van de tekst wordt hier alleen gegeven in de titel van het stukje tekst. Dit doel wordt in dit fragment in diverse stappen gerealiseerd. Daarbij wordt steeds eerst het benodigd materiaal gegeven om stapsgewijs de volgende instructie te kunnen uitvoeren. Het benodigd materiaal wordt drie keer in de vorm van een beschrijvende tekst gegeven, een keer in de vorm van een tabel en een keer in de vorm van een grafiek. De laatste instructie kent zeven stappen.

In de instructie om lineaire formules te maken zien we **alledaagse** termen als *gewicht*, *veer*, *hangt en lang*, maar ook meer algemene schooltaalwoorden als *bepaalt* en *neemt toe*. Verderop in de tekst domineren **specialistische** vaktermen als *tabel*, *startgetal*, *hellingsgetal*, *verband*, *lineaire grafiek*, *verticale as* en *formule*. Aan deze laatste begrippen

herkennen we het vak wiskunde. Kenmerkend voor instructies zijn proceswoorden die gedrag aangeven: *Vul in*, *Schrijf*, *Lees*, *Neem*, *maak af*, maar ook het gewicht *hangt*. In de beschrijvende stukjes worden proceswoorden gebruikt die een staat van zijn aanduiden: *bepaalt*, *heeft*, *is*, *wordt*. Het meest vakspecifieke proceswoord is hier *toenemen*. Dat wordt in de eerste alinea een keer en in de laatste drie keer gebruikt: *Met hoeveel neemt y toe ...*

Hoe wordt het **onderwerp** uitgewerkt? Het **VELD** van alledaags - specialistisch

In de instructie om lineaire formules te maken is duidelijk dat de auteur zich verhoudt tot de lezer/leerling als een **expert** tot een beginner die nog geen enkele kennis heeft van hoe je bij tabellen en grafieken wiskundige formules kunt maken.

- De auteur spreekt de lezer rechtstreeks aan met *je*.
- De auteur geeft instructies in korte afgemeten zinnen, zoals *Maak de formule af*.
- De auteur presenteert zijn informatie als vaststaande feiten, zoals *De lineaire grafiek hiernaast geeft het verband weer tussen de variabelen x en y*.
- Door de uitleg over lineaire formules te starten met een concreet voorbeeld, slaat de auteur een brug tussen de abstracte wereld van de wiskunde en de ervaringswereld van de leerling.

Hoe wordt een **standpunt** ingenomen? De **TOON** van beginner - expert

In de instructie om lineaire formules te maken is de afwisseling van verbale tekst, illustratie (met de gewichten), tabel, grafiek en formule kenmerkend. Wiskundeteksten zijn vaak **multimodaal**; ze geven verschillende representaties van wiskundige fenomenen. In deze tekst legt de auteur met expliciete verwijzingen als *onderstaande tabel*, *deze tabel* en *de lineaire grafiek hiernaast* verband tussen tekstdelen en tussen de tekst en de illustraties.

De instructies in de tekst zijn weergegeven in korte zinnen met de gebiedende wijs: *vul in*, *schrijf*, *maak af*, *lees*, *neem over*.

Hoe wordt **samenhang** aangebracht?
De **MODUS** van mondeling - schriftelijk

Dergelijk gebruik van werkwoorden geeft de tekst een specifiek ritme en zorgt ook voor **samenhang**. Merk op dat de stap naar het abstracte voorbeeld met de lineaire grafiek tamelijk abrupt is en niet is gemarkeerd. Merk ook op dat aan het eind van de tekst de instructie in de vragende vorm wordt gegoten, om stap voor stap de berekening van het *hellingsgetal* te

structureren.

Veel van deze structuurmiddelen vereisen voorbereiding en denkwerk van de schrijver; ze zijn kenmerkend voor schriftelijk taalgebruik.

Veld, Toon en Modus zijn de **registerdimensies** van taalgebruik. Het register van de tekst over *lineaire formules* kan nu als volgt worden getypeerd:

- veld: tussen alledaags en specialistisch
- toon: expert tegen beginner
- modus: overwegend schriftelijk

In de figuur hieronder zien we dat met deze typering de tekst op alle drie de dimensies rechts is gepositioneerd. Met die positie rechts is eigenlijk ook de doeltaal van het vakonderwijs gedefinieerd: het talig niveau waar de leerling in zijn schoolloopbaan met betrekking tot een specifiek vak naartoe werkt.



Het uitgangsniveau (of beginnersniveau) staat links in diezelfde figuur en kan dus als volgt beschreven worden:

- veld: alledaags
- toon: beginner
- modus: mondeling

Bij het leren van een vaktaak moeten leerlingen op alle drie de registerdimensies (veld, toon en modus) dus van links naar rechts zien te komen. Deze beweging op de registerdimensies geeft als het ware een invulling aan de ontwikkeling van Dagelijkse Algemene Taalvaardigheid (DAT) naar Cognitieve Academische Taalvaardigheid (CAT). Dat gaat niet in één keer. Het is een geleidelijk leerproces waarvoor tijd, oefening en instructie nodig zijn (Van der Leeuw & Meestringa, 2014, 112-125).

1.2 Tekstdoelen (genres) en redeneerwijzen in het voortgezet onderwijs

In de vorige paragraaf presenteerden we het **tekstdoel** als eerste aspect van een vaktekst. Afhankelijk van het doel kent een tekst een aantal specifieke stadia.

In het getoonde voorbeeld over lineaire formules ging het om een **Procedure** (instruerende tekst) die is opgebouwd in de stadia Doel ^ Benodigd materiaal ^ Stapsgewijze instructie. Teksten met een overeenkomstig doel en opbouw kunnen we classificeren als een bepaald **genre**. Een definitie van genre is:

**een doelgericht, gefaseerd en sociaal proces
waarin een bepaalde redenering wordt gerealiseerd.**

We spreken van

- **doelgericht** omdat we het genre gebruiken om iets gedaan te krijgen;
- **gefaseerd** omdat voor het bereiken van dat doel een aantal stadia wordt doorlopen; en
- **sociaal** omdat de inhoud via interactie met anderen wordt gedeeld.

Het ordenen van teksten in genres helpt ons de verscheidenheid van teksten te begrijpen waarmee leerlingen in de loop der jaren bij verschillende vak- en leergebieden moeten leren werken. Afhankelijk van doel en context zien teksten er namelijk steeds iets anders uit. De wiskundevakken maken op school vooral gebruik van twee feitelijke genres die ieder een kenmerkende manier van redeneren representeren:

- **Procedure**; het leren en onderzoeken van de wiskunde
- **Verslag**; het zorgvuldig weergeven van de achtereenvolgens genomen stappen.

In de vorige paragraaf gaven we een voorbeeld van een Procedure. In hoofdstuk 2 bespreken we hoe de Procedure en het Verslag werken bij wiskundevakken en waarom we dit de meest typerende redeneerwijzen vinden. In de bijlage van deze brochure geven we een karakterisering van de veelvoorkomende genres op school.

Taalbeleid

Deze genres of redeneerwijzen in de wiskundevakken staan niet op zichzelf, ook in andere schoolvakken wordt er geredeneerd, gebruik makend van dezelfde en/of juist andere genres. Op basis van inventarisaties en analyses van mondelinge en schriftelijke teksten in het huidige basis- en voortgezet onderwijs (Van der Leeuw & Meestringa, 2014; Van Norden, 2014) is het volgende genre-overzicht te geven. Dit schema maakt duidelijk dat elk vak op school eigen taakkenmerken heeft en dat het samenhangende kader van genres of redeneerwijzen het gesprek over taalbeleid niet alleen generiek, maar ook vakinhoudelijk gevoerd kan worden.

Tabel: Overzicht van prominente genres in de vakken

| | KUNST | M&M | N&T | WISKUNDE | NEDERLANDS |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| Verhaal | | | | | X |
| Vertelling | | | | | |
| Verslag | | | | X | |
| Beschrijving | X | X | X | | |
| Procedure | X | | X | X | |
| Verklaring | | X | X | | |
| Verzoek | | | | | |
| Betoog | | | | | X |
| Beschouwing | | | | | |
| Respons | X | | | | X |

Dit schema biedt ons enig houvast ten aanzien van de horizontale samenhang van genregebruik en het vakmatig redeneren in het voortgezet onderwijs. We zien dat:

- de tien genoemde genres zijn onder te brengen in drie zogenoemde genrefamilies, te weten verhalende genres (geel), feitelijke genres (grijs) en waarderende genres (oranje).
- in de wiskundevakken het vooral gaat om feitelijke genres (Procedure en Verslag), c.q. feitelijke manieren van redeneren. Die focus op feitelijk redeneren delen de wiskundevakken met de mens- en maatschappijvakken en de natuurwetenschappelijke vakken;
- de Verklaring prominent aanwezig is in zowel de natuurwetenschappelijke vakken als de mens- en maatschappijvakken;
- in het vak Nederlands het vooral gaat om verhalende en waarderende genres en de feitelijke genres veel minder aandacht krijgen.

Bij de interpretatie van dit genreoverzicht zijn de volgende kanttekeningen van belang. In de eerste plaats geeft het schema alleen veelvoorkomende redeneerwijzen per vak- of leergebied weer; dat wil zeggen dat in de wiskundevakken bijvoorbeeld ook teksten met Verklaringen, Beschouwingen en Betogen kunnen voorkomen, alleen met minder gewicht.

Ten tweede is het classificeren van teksten als een bepaald genre een interpretatie en vaak een vereenvoudiging van de realiteit, waarover gesproken kan worden.

En ten derde is voor een effectieve aanpak van vakmatig redeneren (genregebruik) afstemming tussen de vakken noodzakelijk. Taalbeleid dus. Het gemeenschappelijk kader dat we in deze brochure presenteren kan daarbij een rol spelen.

Zowel op schoolniveau als in het kader van landelijke leerplanontwikkeling kan dit overzicht worden gebruikt om de samenhang te versterken.

2. Wiskundige denkactiviteiten met de genres Procedure en Verslag

In het eerste hoofdstuk hebben we een instructie getypeerd als uitwerking van het genre **Procedure**. De redenering die daarin wordt verwezenlijkt is kenmerkend voor schoolboekteksten van wiskundevakken. In dit tweede hoofdstuk illustreren we kenmerken van vaktaal bij wiskundevakken aan het onderdeel wiskundige denkactiviteiten (Drijvers, 2015; Van Streun & Kop, 2016, 2017; Van Streun & Tolboom, 2017). Als we namelijk kijken naar hoe vaktaal voorkomt in kerndoelen, tussendoelen en (nieuwe) eindtermen voor de verschillende wiskundevakken en in de verschillende schooltypen, zien we dat dit vaak verbonden is met wiskundig redeneren en met wiskundige denkactiviteiten (Van Streun, 2014). In de meest recente vernieuwingen van de examenprogramma's is getracht wiskundig denken een duidelijker plaats te geven in het wiskundeonderwijs en de toetsing. Dit vanuit de gedachte dat wiskundeonderwijs meer moet inhouden dan het trainen van regels en algoritmen door vooral veel sommen te maken. Die wiskundige denkactiviteiten worden gerealiseerd in vaktaal, in het samenspel van taal, symbolen en grafische voorstellingen.

In deze brochure beperken we ons dan ook tot voorbeelden waarin het wiskundig denken van de leerling centraal staat. Dat doet namelijk vaak een beroep op de complexe formuleervaardigheid van rijke en meer gevarieerde redeneringen met combinaties van zinnen, formules en visualisaties daarvan.

We beschrijven in dit hoofdstuk de volgende twee genres:

| Paragraaf en genre | Niveau | Vak | Onderwerp |
|--------------------|--------|------------|---------------------------------|
| 2.1 Procedure | havo 5 | wiskunde a | onderzoek naar rekenvaardigheid |
| 2.2 Verslag | havo 5 | wiskunde b | het wiskundig model |

We sluiten het hoofdstuk af met een samenvattende conclusie in paragraaf 2.3.

2.1 De Procedure

In hoofdstuk 1 is het genre **Procedure** al beschreven om het taalkundig gereedschap van deze brochure te introduceren. Dit genre is zeer prominent en herkenbaar bij de wiskundevakken. Als tweede voorbeeld hebben we daarom gekozen voor een meer complexe realisatie van dit genre, zoals we die bijvoorbeeld vinden in het centraal examen van 2017-1 havo wiskunde A. We hebben gekozen voor opgave 5.

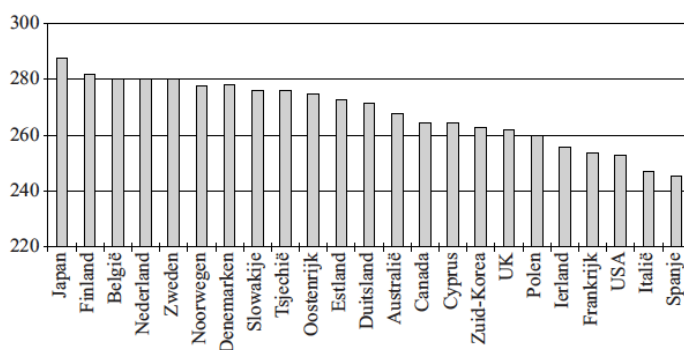
Onderzoek naar rekenvaardigheid

De OESO (organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) publiceerde in oktober 2013 de resultaten van het onderzoek PIAAC (Programma for the International Assessment of Adult Competencies). Dit is een onderzoek naar de reken-, taal- en probleemoplossingsvaardigheden in 23 landen onder ruim 5000 16- 65-jarigen per land.

Deze opgave gaat alleen over de score op rekenvaardigheid. Deze score heeft een schaal van 0 tot 500.

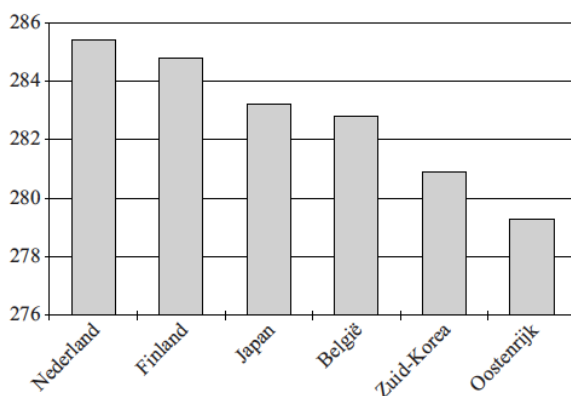
Voor ieder land is op basis van het onderzoek een schatting gemaakt voor de gemiddelde score van de gehele populatie van 16- tot 65-jarigen. In figuur 1 zie je de gemiddelde scores per land. Nederland staat op de vierde plaats.

figuur 1 Gemiddelde score op rekenvaardigheid, 16-65 jaar



Ook voor de deelpopulatie 16- tot 24-jarigen zijn de gemiddelde scores per land bepaald. Nederland staat hier op de eerste plaats. In figuur 2 zie je de gemiddelde scores van de top 6. Zweden behoort niet tot de top 6.

figuur 2 Gemiddelde score op rekenvaardigheid, 16-24 jaar



Als je de figuren 1 en 2 met elkaar vergelijkt, zijn er verschillende conclusies mogelijk. Hieronder staan twee mogelijke conclusies.

- 1 In Nederland scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger dan de 25- tot 65-jarigen.
- 2 In Zweden scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld lager dan de 24- tot 65-jarigen.

4p 5 Leg bij elk van deze conclusies uit of deze juist is en of deze kan worden getrokken uit het vergelijken van de figuren 1 en 2.

Benodigd
materiaal

Stapsgewijze
instructie

Doel

Stadia

Schematisch kent het genre de volgende stadia: Doel ^ Benodigd materiaal ^ Stapsgewijze instructie. Merk op dat het **doel** van deze tekst in de laatste zin wordt geïdentificeerd: de kandidaten moeten laten zien dat zij juiste conclusies kunnen trekken uit gegeven data, door in dit geval de juistheid van gegeven conclusies te beoordelen. Daarbij moeten zij schakelen tussen tekst en grafieken. De laatste zin van de tekst is gesteld in de gebiedende wijs: het is een instructie tot handelingen op basis van de gegevens die erboven staan. De zin vormt een geheel met de alinea erboven, die weer verwijst naar de grafische figuren die daar weer boven staan en daar worden toegelicht.

In de tekst worden gegevens uit een onderzoek beschreven met verbale tekst en twee grafieken. Dit vormt het **benodigd materiaal** waarmee de kandidaten de instructie moeten uitvoeren. De **stappen** die zij daartoe moeten zetten worden aangegeven met de *twee mogelijke conclusies* in combinatie met de woordgroep *bij elk van deze conclusies*. De vervolgstappen die de kandidaat bij elke conclusie moet zetten om tot een correct antwoord te komen, zijn niet gegeven en die verschillen per conclusie. Door die stappen goed te zetten en op te schrijven, kunnen de kandidaten laten zien wat ze kunnen en weten.

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

De eerste alinea bevat beknopte informatie over het PIAAC-onderzoek waar het in deze opdracht over gaat. Het voor leerlingen niet-alledaagse onderwerp wordt geïntroduceerd met twee afkortingen die in twee talen worden uitgeschreven. De tweede alinea verwijst met *Deze opgave* al vooruit naar de opgave aan het eind.

Wiskundige vaktaal komt voor het eerst voor in de derde alinea, waar de begrippen *schatting*, *gemiddelde score* en *gehele populatie* worden gebruikt. Bij deze alinea hoort de eerste grafiek (figuur 1). In de vierde alinea (met de tweede grafiek in figuur 2) staat dat de gemiddelde scores zijn *bepaald*. Het verschil met de *schatting* uit de derde alinea lijkt voor de opgave niet van belang. In de vijfde alinea, onder figuur 2, wordt de (gemiddelde) score uit de eerdere alinea's ingezet als een proces *scores: In Nederland scores de 16- tot 24-jarigen In Zweden scores* De opgave zelf *Leg bij elk van deze conclusies ...* bevat de langste woordgroep van de tekst: *op basis van het vergelijken van de figuren 1 en 2*.

De tekst als geheel bevat niet veel specialistische vaktaal, maar wel veel contextspecifieke taal, waaronder de woordcombinatie *reken-, taal- en probleemoplossingsvaardigheden* en diverse getallen met verschillende betekenissen. Bij wiskunde A komt dit vaker voor dan bij wiskunde B, zeker in het geval van het havo vergeleken met het vwo.

Toon: hoe verhoudt de auteur zich tot de materie en de lezer?

De schrijver is zakelijk en deskundig: hij overziet het PIAAC-rapport van de OESO, presenteert daaruit bepaalde gegevens, en geeft de lezer de opdracht iets uit te leggen. Het woordje *kan* in het tweede deel van de opdracht, is saillant: *of deze kan worden getrokken op basis van het vergelijken van de figuren 1 en 2*. Met dat modale werkwoord uit de schrijver twijfel over de conclusies, een twijfel die weerlegd of bevestigd moet worden.

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

In de tekst wordt duidelijk verwezen naar de twee bijbehorende figuren, maar verder zit de tekst vrij ingewikkeld in elkaar, zoals duidelijk wordt als we op de interne verwijzingen letten. Dit begint al in de tweede alinea waar *Deze opgave* verwijst naar de het geheel van teksten en vragen, zoals vraag 5. De tweede zin van dezelfde alinea verwijst impliciet naar de verticale assen, die bovendien geen label hebben. De betekenis van de verticale as kan worden afgelezen uit de titels van de figuren. Merk op dat hierbij in de twee figuren een verschillende schaal wordt gehanteerd.

In de laatste regel vinden we een derde stadium: de **Conclusie**. Voor het Verslag is dit stadium in het algemeen facultatief. Maar in uitwerkingen van opgaven bij wiskunde is de conclusie minder facultatief. Daar is dit heel gebruikelijk, zo niet verplicht. In de Conclusie wordt de opbrengst van de uitwerking expliciet samengevat. We kunnen dus ook zeggen: het wiskundig verslag kent drie stadia: Identificatie \wedge Gebeurtenissen \wedge Conclusie.

Registeranalyse

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

De *Uitwerking* wordt gerealiseerd door vrijwel alleen wiskundige formules te hanteren.

Toon: hoe verhoudt de auteur zich tot de materie en de lezer?

In deze tekst zijn schrijver en lezer beide buiten beeld, waardoor de aandacht wordt gefocust op de handeling.

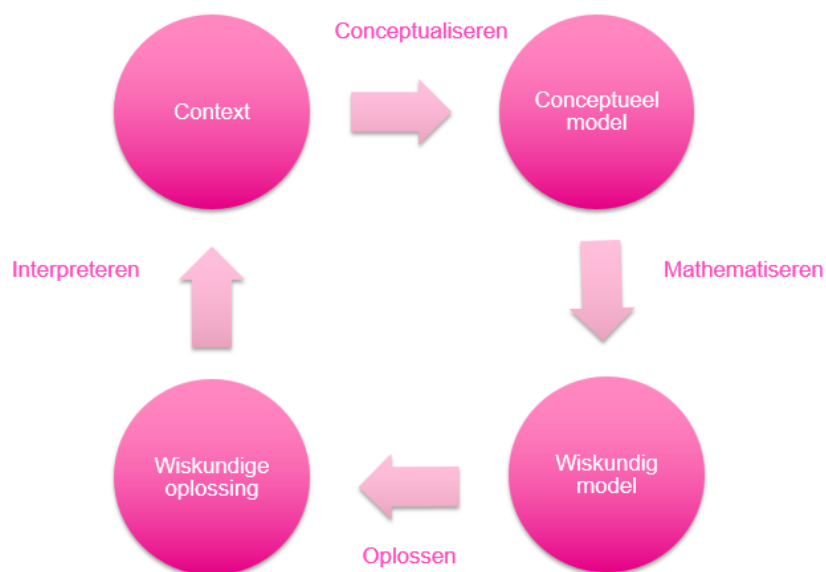
Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

De tekst geeft een voor de wiskunde typerende manier van samenhang aanbrengen weer: iedere regel staat voor een nieuwe stap. Zo hoort dat. Met *invullen geeft, ofwel* en *dus* worden tussenstapjes aangegeven, maar ook dat zou met symbolen kunnen worden gedaan.

2.3 Toepassing bij wiskundevakken

De **Procedure** en het **Verslag** horen in de wiskundevakken als broertje en zusje bij elkaar. In de drie tekstvoorbeelden die we tot nu toe hebben gepresenteerd, zien we dat er daarbij in verschillende mate wordt gependeld tussen verschillende representaties van de werkelijkheid, tussen taal, tabellen, grafieken en symbolen en formules. In meer alledaagse taal wordt voortdurend de relatie met de werkelijkheid gelegd, al is in het laatste voorbeeld de vlucht van de vuurwerkpijl even buiten beeld. Van leerlingen wordt gevraagd de **Procedures** goed te begrijpen en zelf hun wiskundig redeneren goed weer te geven in **Verslagen**.

Dat het Verslag een belangrijk genre is in de wiskunde, is af te lezen aan bijvoorbeeld de Modelleercyclus van Spandaw & Zwaneveld (Uit Perenet & Zwaneveld, 2011; zie figuur op de volgende pagina). Bij iedere stap van de werkelijkheid naar de wiskunde, binnen de wiskundige redenering en weer terug naar de werkelijkheid, moeten er representaties vervangen worden door andere (taal, tabellen, grafieken, symbolen en formules) en dat moet stap voor stap zorgvuldig worden gedocumenteerd. Elke stap heeft een naam: conceptualiseren (ook wel horizontaal mathematiseren genoemd), (verticaal) mathematiseren, oplossen en interpreteren. Daarbij wordt de laatste stap van het interpreteren, die ook wel valideren wordt genoemd, als controle gebruikt. De kunst in de Modelleercyclus is, eenvoudig gezegd, de goede keuzes te maken op basis van contextuele en wiskundige kennis en inzicht.



Komt het genre van de Verklaring in de wiskundevakken dan niet ook veel voor? Het taalgebruik in de wiskunde klas doet dat wel vermoeden. Daar kun je bijvoorbeeld het volgende horen of lezen:

- Verklaar hoe je tot de oplossing bent gekomen.
- Bewijs dat iets klopt.
- Als je iets herleidt, geef dan aan hoe de sequentie is verlopen.
- Los een probleem binnen de wiskunde los van de context op.

Maar in al deze gevallen, komt het toch vaak neer op het zorgvuldig en foutloos documenteren van de stappen die worden gezet, hoe de sequentie is verlopen. Dat er in de wiskundevakken ook van verklaren en uitleggen wordt gesproken, is een voorbeeld van het ambigue karakter van taal. Je kunt wel zeggen: 'Omdat $a^2 + b^2 = c^2$ is c gelijk aan de wortel uit $a^2 + b^2$ ', en dan geef je wel een redenering, maar geen Verklaring, zoals we die bij andere vakken (met meerder factoren, of meerdere gevolgen) kennen. In feite is de omdat-redenering niet meer dan een omzetting van een vergelijking. Ook al leren leerlingen diverse wiskundige denkactiviteiten inzetten, wat ze daarover leren zeggen en schrijven kunnen we taalkundig typeren als een Verslag.

3. Vaktaal leren gebruiken

We zagen aan de twee beschreven voorbeelden van Procedures dat de teksten bij de wiskundevakken door de schooljaren heen steeds complexer worden: de context wordt ingewikkelder, het veld wordt steeds specialistischer met complexe woordgroepen en combinaties hiervan, de toon wordt zakelijker en afstandelijker, en dat zie je ook terug in de modus want de toegenomen complexiteit stelt ook hogere eisen aan het schriftelijk taalgebruik.

In dit hoofdstuk leggen we uit welke ontwikkeling met betrekking tot vakmatig redeneren door de jaren heen van leerlingen zelf verwacht wordt in het voortgezet onderwijs.

- In paragraaf 3.1 geven we een overzicht van wat in de **kerndoelen** voor de onderbouw en de **eindtermen** van examenprogramma's voor vmbo en havo/vwo is geformuleerd voor de ontwikkeling van wiskundig redeneren.
- In paragraaf 3.2, 3.3 en 3.4 kijken we hoe dit correspondeert met **opgaven** uit onder-, midden en bovenbouw van het vo.
- In paragraaf 3.5 en 3.6 bekijken we twee **gesprekken met leerlingen** waarin zij verslag doen van hun **wiskundig redeneren** bij de opgaven uit respectievelijk 3.2 en 3.3.

3.1 Kerndoelen en eindtermen

In deze paragraaf laten we, aan de hand van enkele citaten uit de kerndoelen voor de onderbouw vo en examenprogramma's vmbo en havo/vwo, zien hoe daarin de verwachtingen ten aanzien van de vaktaalvaardigheid en het vakmatig redeneren bij wiskunde worden verwoord.

Kerndoelen onderbouw

In de preambule van de kerndoelen onderbouw staat het volgende:

Aansluitend op het basisonderwijs ontwikkelen ze hun vaardigheden in de 'wiskundetaal' en worden steeds verder 'wiskundig geletterd en gecijferd'. De wiskundetaal bestaat onder andere uit rekenkundige, wiskundige en meetkundige uitdrukkingen, meetkundige tekeningen en schema's, modellen, formele en informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en opdrachten voor computer en rekenmachine. 'Wiskundig geletterd en gecijferd worden' wil zeggen dat leerlingen een repertoire opbouwen van parate kennis, inzichten en routines en leren deze op een juiste manier toe te passen in wiskundige technieken, aanpakken, redeneringen en rekenwijzen.

Dit is vervolgens samengevat in kerndoel 19:

De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.

Daarnaast kunnen we ook in kerndoel 21 talige aspecten herkennen:

De leerling leert een wiskundige argumentatie op te zetten en te onderscheiden van meningen en beweringen en leert daarbij met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen.

Het gaat in kerndoel 19 om het leren en gebruiken van wiskundetaal in algemene zin. Bij kerndoel 21 gaat het om een specifieke manier van redeneren en formuleren namelijk 'het opzetten van een wiskundige argumentatie.'

Examenprogramma Wiskunde vmbo

In het examenprogramma wiskunde voor vmbo lezen we in Domein A Vaardigheden, Subdomein A1 onder Algemene vaardigheden onder meer:

De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen. De kandidaat kan

1. doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken;
2. adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal communiceren over onderwerpen uit de wiskunde;

(...)

Het woord wiskundetaal komt niet voor in deze eindtermen. In A1.1 herkennen we 'lezen' en in A1.2 het spreken en schrijven (over onderwerpen uit de wiskunde).

In subdomein A3, Wiskundige vaardigheden vinden we 'taal' wel expliciet terug.

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige vaardigheden, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken. De kandidaat

(...)

3. heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;

(...)

7. kan vakspecifieke taal interpreteren en gebruiken;
8. kan de correctheid van wiskundige redeneringen verifiëren;
9. kan eenvoudige wiskundige redeneringen correct onder woorden brengen;

(...)

Bij de specifieke eindtermen van het kerndeel komen we het hanteren van vaktaalvaardigheden meer impliciet tegen, bijvoorbeeld:

| | |
|--|---|
| Vmbo WI/K/4 Algebraïsche verbanden | De kandidaat kan problemen oplossen waarin verbanden tussen variabelen een rol spelen, en daarbij: <ul style="list-style-type: none">– tabellen, grafieken en woordformules hanteren, in het bijzonder bij lineaire verbanden– geschikte wiskundige modellen gebruiken. |
| Vmbo WI/K/8 Geïntegreerde wiskundige activiteiten | De kandidaat kan problemen in alledaagse situaties vertalen naar wiskundige problemen, en daarbij: <ul style="list-style-type: none">– de hierboven genoemde vaardigheden geïntegreerd gebruiken– conclusies trekken die relevant zijn voor de bewuste probleemsituatie. |

Als we de vaktaalvaardigheden uit de kerndoelen voor de onderbouw vergelijken met die uit de eindtermen voor het vmbo zien we een toename in het belang van het leren en gebruiken van vaktaal en een nadere specificering van wat daaronder wordt verstaan.

Examenprogramma's havo/vwo

In vergelijking met de examenprogramma's wiskunde voor vmbo is het opvallend dat de examenprogramma's van de wiskundevakken voor havo en vwo minder expliciet zijn over het gebruik van vaktaal. Weliswaar geeft de eerste eindterm van al deze examenprogramma's onder Domein A Vaardigheden aan dat de kandidaat kan *communiceren met anderen* over de rol van wiskunde in de maatschappij en geeft de derde aan dat de kandidaat wiskundige denkactiviteiten *beheerst*. (eindterm 3), maar dat daarbij de vaktaal moet worden beheerst, moet worden afgeleid uit de specifieke formuleringen¹. Daarvoor kunnen we letten op de werkwoorden die in de eindtermen fungeren. De meerderheid daarvan, zoals *berekenen*, *herkennen*, *interpreteren*, *beoordelen*, *relateren*, *verbinden*, *bepalen* en *hanteren* duiden op mentale processen, op handelingen die de kandidaat in het hoofd kan doen. Andere werkwoorden veronderstellen gedrag, handelingen op papier of een ander plat vlak, zoals (een grafiek) *tekenen*, (een tabel) *opstellen*, (een telprobleem) *schematiseren*. Bijvoorbeeld eindterm 7 uit wiskunde A vwo.

De kandidaat kan formules en functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden zonder gebruik van ICT, en daar waar nodig met numerieke of grafische methoden met inzet van ICT, en de uitkomst interpreteren in termen van een context

In het algemeen lijkt het dat deskundig en zorgvuldig vaktaalgebruik wordt verondersteld en niet geëxpliciteerd.

Er zijn wel enkele uitzonderingen. Zo luidt bijvoorbeeld in het examenprogramma wiskunde B havo eindterm 4:

De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

Het proceswoord *beschrijven* geeft aan dat de kandidaat de informatie uit de grafiek nauwkeurig in woorden moet kunnen weergeven. Deze productieve taak ontbreekt in het examenprogramma wiskunde A havo. Daar wordt in de vergelijkbare eindterm 8 proceswoord *aflezen* gebruikt. Dit duidt erop dat in wiskunde B aan het spreken en schrijven over grafieken hogere eisen worden gesteld dan bij wiskunde A. Eindterm 6 van wiskunde B havo gaat nog een stap verder door naast het kunnen beschrijven van verbanden ook het daarover kunnen *redeneren* als eis aan de kandidaat te stellen.

De kandidaat kan verbanden tussen de twee grootheden a en b van de vorm $a = c \cdot b d$ herkennen, toepassen en bijbehorende grafieken tekenen, vanuit de beschrijving van een dergelijk verband een formule opstellen, de evenredigheidsconstante bepalen en kan rekenen met en redeneren over verbanden van deze vorm en het effect van schaalvergroting.

Naast *beschrijven* zijn er nog enkele werkwoorden die op de noodzaak van het beheersen van verbale processen duiden: *uitspraken doen* en (een formule) *opstellen*. Opmerkelijk is tot slot

¹ In de syllabi van het CvTE wordt bij de specificatie van eindterm A3 het belang van vakspecifiek taalgebruik en het onder woorden kunnen brengen van wiskundige redeneringen wel benoemd.

dat een eindterm uit het examenprogramma wiskunde C vwo onderstreept dat zorgvuldig vakmatig formuleren in deze examenprogramma's impliciet gelaten is. Daar staat namelijk in eindterm 7 dat de kandidaat het veranderingsgedrag van diverse functies en de regelmaat in rijen *doelgericht* moet kunnen beschrijven.

De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.

Blijkbaar verdient *doelgericht beschrijven* in de examenprogramma's wel aandacht, en krijgt het vakmatig formuleren dat niet. Maar als dat formuleren geen doel is, krijgt het dan wel de aandacht die het nodig heeft?

Samenvatting

In de kerndoelen onderbouw vo en de eindtermen voor vmbo, havo en vwo zien we dat er in de kerndoelen nog wel oog is voor vakmatig formuleren, maar in de eindtermen van de examenprogramma's zien we dat nauwelijks terug. Daar wordt dit meestal impliciet gelaten, uitgezonderd enkele eindtermen voor wiskunde B havo.

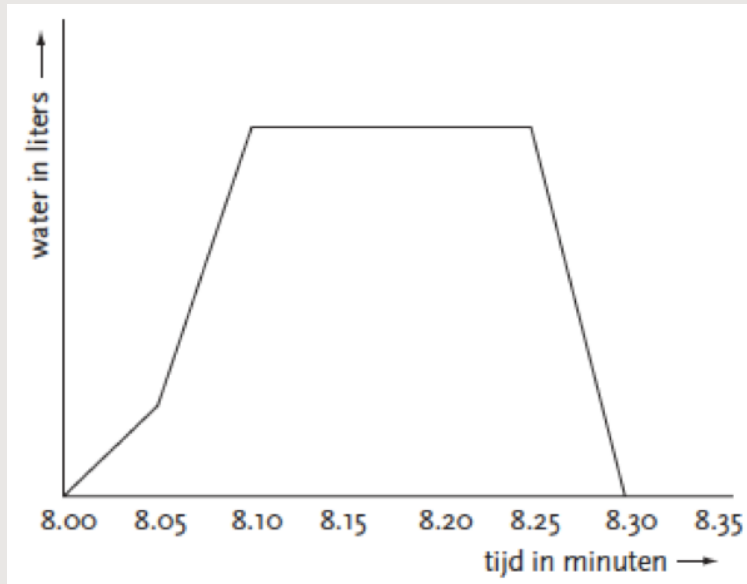
In de volgende paragrafen karakteriseren we hoe deze vaktaalontwikkeling bij wiskundevakken plaatsvindt. We doen dit met drie opgaven en twee protocollen van gesprekken met leerlingen.

| Paragraaf | Klas | Onderwerp | Genre |
|-----------|-------------|----------------------------|-----------|
| 3.2 | 1 mavo/havo | Leren werken met grafieken | Procedure |
| 3.3 | 3 vwo | De achthoek | Procedure |
| 3.4 | 5 havo | Het verpakkingsvraagstuk | Procedure |
| 3.5 | 1 mavo/vwo | Leren werken met grafieken | Verslag |
| 3.6 | 3 vwo | De achthoek | Verslag |

3.2 Leren werken met grafieken: een Procedure in 1 mavo/havo

In haar proefschrift *Taal telt!* gebruikt Prenger (2005) onder andere onderstaande opgave uit *Moderne Wiskunde* (Breugel e.a. 1998: vbo-mavo 1a, p. 146; mavo-havo 1a, p. 146) om het taalgebruik in wiskundeboeken te analyseren en na te gaan hoe leerlingen een dergelijke opgave aanpakken. We gebruiken delen uit haar analyse om te laten zien **hoe taal werkt** in de onderbouw leerjaar 1, in dit geval bij het domein grafieken.

1. René neemt een bad. Hij laat de eerste vijf minuten alleen de warmwaterkraan open staan. Hij merkt dat het water veel te warm wordt en daarom zet hij ook de koudwaterkraan open. De grafiek laat het verband zien tussen de tijd en de hoeveelheid water in het bad.



- Wat wordt er weergegeven op de verticale as?
- Als ook de koudwaterkraan opengaat, loopt het bad sneller vol. Waaraan kun je dat zien?
- Hoe laat wordt de koudwaterkraan opengedraaid?
- Na een tijdje wordt de stop uit het bad getrokken. Hoe kun je dat aan de grafiek zien? Hoe laat is dat?

Stadia: Het **doel** van zo'n opgave is leerlingen te instrueren opdat zij door de opgave te maken en te bespreken de stof leren beheersen, dan wel (als de opgave in een toets staat) dat zij kunnen laten zien dat ze de stof beheersen. Dit doel is hier het leren werken met verschillende representaties van een concrete situatie; het verhaal, de afbeelding en de verbalisering van de afbeelding. Dit doel van een opgave is in het onderwijs zo algemeen dat het gebruikelijk is het in de tekst onbenoemd te laten. De andere twee stadia van zo'n

Procedure: Benodigd materiaal ^ Stapsgewijze instructie, komen wel voor. De opgave bevat bronnen die de leerling kan gebruiken: de introductietekst, de grafiek en de deelvragen. De eerste twee bronnen geven het materiaal dat nodig is voor de beantwoording van de deelvragen, die de leerling stap voor stap door het lezen van de grafiek leiden.

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

Prenger (2005) merkt op dat in de stamtekst in de vierde zin het perspectief van de tekst verandert: de eerste drie zinnen vertellen in alledaagse woorden wat René meemaakt, in de vierde zin wordt de blik op de voorliggende opgave gericht en worden de schoolse vaktermen *grafiek*, *verband* en *hoeveelheid* gebruikt. In de opgave worden daarnaast nog twee schoolse vakbegrippen gebruikt: *weergeven* en *de verticale as*. Voor het overige is het alledaagse taal wat de klok slaat.

Toon: hoe verhoudt de auteur zich tot de materie en de lezer?

De schrijver beschrijft zakelijk een belevenis van een René, verbindt die met de afbeelding met *De grafiek laat het verband zien tussen de tijd en de hoeveelheid water in het bad*, en stelt van daaruit vragen aan de lezer die hij tegemoet komt en met *je* aanspreekt.

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

Prenger (2005) beschrijft in detail hoe de leerling deze opgave kan aanpakken. Wij beperken ons hier tot de constatering dat de leerling in de tekst enkele keren wordt gewezen op de grafiek, waarmee de twee representaties 'tekst' en 'grafiek' met elkaar in verband worden gebracht. In de deelvragen b, c en d zien we dat van de leerling gevraagd wordt te werken met de grafiek door te schakelen tussen beide representaties. De teksten over de kranen, het bad de stop en de tijd (*hoe laat, na een tijdje, hoe laat is dat?*) moeten in verband gebracht worden met de grafiek. Alleen in deelvraag d wordt dit in de vraagtekst expliciet aangegeven: *hoe kun je dat aan de grafiek zien?* In deelvraag b zou je een 'vage' verwijzing naar de grafiek kunnen afleiden, omdat de term *zien* wordt gebruikt in de vraagzin: *waaraan kun je dat zien?* De leerling zal zelf moeten afleiden dat je dan de grafiek moet gebruiken. In deelvraag c ontbreekt elke verwijzing naar de grafiek.

3.3 De achthoek: een Procedure in 3 vwo

Deze opdracht voor klas 3 vwo, waarin wiskundig denken centraal staat is ontworpen door Egbert-Jan Jonker in het kader van een nascholingscursus WDA (wiskundige denkactiviteiten). Het is een opdracht die volgens de ontwerper 'aansluit bij het opstellen van een vergelijking bij een situatie'. We analyseren de opdracht hieronder. (Figuur 1 is hier verrijkt met aantekeningen van de leerling die verderop in paragraaf 3.5 aan het woord komt over zijn oplossing van dit vraagstuk.)

Startopdracht 3V

Zie figuur 1

Gegeven is een vierkant van 10 bij 10 cm.

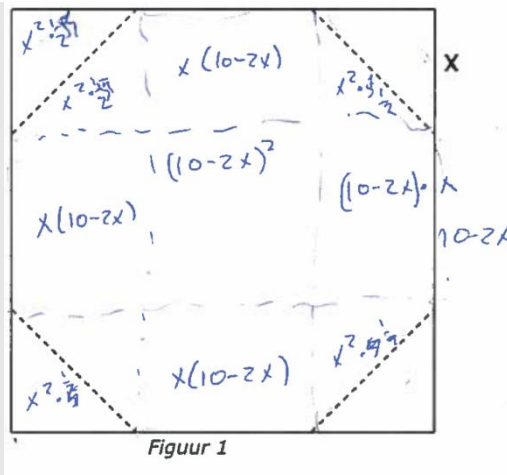
Je wil de vier punten van dit vierkant afknippen zodat je een achthoek overhoudt.

Van deze achthoek zijn alle zijden even lang.

Stel het stukje wat je afknipt gelijk aan x (zie de figuur).

Wat worden de lengten van de zijden van de achthoek die je overhoudt?

Geef het antwoord in twee decimalen.



Stadia: Het **Doel** van de tekst is aangegeven in de titel *Startopdracht 3V*, waarmee alleen wordt aangegeven dat het een eerste is van een reeks opdrachten. Het **Benodigd materiaal** staat in de eerste twee alinea's, vanaf *Zie figuur 1* tot *alle zijden even lang*. Wat de **Stapsgewijze instructie** betreft: in de opgave wordt één stap als advies gegeven: *Stel het stukje wat je afknipt gelijk aan x* . De leerling moet verder zelf uitvinden welke stappen nodig zijn om tot een oplossing te komen (er zijn verschillende mogelijkheden). Zo moet hij onder meer bepalen of x staat voor de lange zijde of de korte zijde van de driehoek, of voor de oppervlakte ervan.

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

De gegeven situatie is meetkundig van aard. Dat uit zich onder andere in de taal: het gaat over een *vierkant* dat door het afknippen van de vier punten verandert in een *achthoek*. Alle *zijden* daarvan zijn *even lang*. De vraag is wat de *lengten* van de zijden van die achthoek dan zijn. Met het advies *Stel het stukje wat je afknijpt gelijk aan x* verwijst de schrijver naar de algebra, waarmee de oplossing via het opstellen van vergelijkingen kan worden gezocht. Dat het hier specifiek gaat om de lengte van de rechthoekzijden (de afgeknipte stukjes zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken) vermeldt de tekst niet. Het proces *afknippen* en de woordgroep *het stukje wat je afknijpt* zijn beide voorbeelden van vrij alledaags taalgebruik.

Toon: hoe verhoudt de auteur zich tot de materie en de lezer?

De schrijver is de expert die zich dichtbij de lezer opstelt (*je*), hem adviseert en nauwkeurige opdrachten kan geven: *Geef het antwoord in twee decimalen*.

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

De tekst verwijst twee keer naar de figuur en de zinnen in de eerste twee alinea's bouwen op elkaar voort. Met witregels worden overgangen aangegeven.

3.4 Het verpakkingsvraagstuk: een Procedure in de bovenbouw

Een in het wiskundeonderwijs veelgebruikt type optimaliseringsprobleem is het vinden van de verpakking die (met het minste materiaal) het grootste volume heeft. Om een dergelijk probleem op te lossen zal de leerling (afhankelijk van de geboden structuur) een aantal denkstappen moeten zetten in het oplossingsproces. Er zijn veel varianten van dit probleem in omloop waarbij zowel de context als de opgave daaromheen verschilt.

Vaak wordt een dergelijk probleem aan de leerlingen gegeven in de vorm van een praktische opdracht. In het voorbeeld hieronder voor een wiskunde B-klas 5 havo, wordt een praktische opdracht over het optimaliseren van verpakkingen met vier opgaven ingeleid. Opgave 1 laat de leerlingen differentiëren met een kwadratische en een wortelfunctie. Daarna volgen drie toepassingsopgaven, waarvan we hier alleen de eerste opnemen. We analyseren de vaktaal in deze twee opgaven.

Opgave 1

- Gegeven is de functie $f(x) = 9 - x$. Op de grafiek van f ligt een punt $P(p; f(p))$ met $-3 < p < 0$. De projectie van P op de x -as is punt $P'(p; 0)$. Op de grafiek van f ligt een punt $Q(\neq P)$ met dezelfde y -coördinaat als P . Punt Q' maakt rechthoek $PQQ'P'$ compleet. Schets de situatie, geef een formule voor de oppervlakte van $PQQ'P'$ en bereken daarna met differentiëren exact de maximale oppervlakte van $PQQ'P'$.
- Gegeven is de functie $g(x) = x$. Op de grafiek van g ligt een punt $A(a; g(a))$ met $0 < a < 6$. De projectie van A op de x -as is punt B . Op de x -as ligt ook het punt $C(0; 6)$. Bereken exact de maximale oppervlakte van driehoek ABC .

Opgave 2

Je hebt een rechthoekig stuk stevig karton. Als je bij de hoekpunten vierkantjes wegknijpt, kun je er een bakje van vouwen.

We willen de inhoud van het bakje zo groot mogelijk laten zijn.

- De afmetingen van het karton zijn 60 cm bij 40 cm. Bereken met differentiëren de maximale inhoud. Aanwijzing: noem de lengte van de zijden van de vierkantjes x en druk de inhoud van het bakje uit in x .
- De lengte van het stuk karton is tweemaal zo groot als de breedte; de afmetingen zijn dus $2a$ bij a . Druk de maximale inhoud uit in a .

Stadia: Net als bij de opgave in 3.2 is het doel de leerlingen iets wiskundigs beter te leren doen, in dit geval de techniek van het differentiëren gebruiken in optimaliseringsvraagstukken. Opgave 1 is een opwarmer en geeft daarmee een aanwijzing voor de denkactiviteiten in de daarop volgende opgaven. Daarbij wordt gependeld tussen de formules, de grafiek (die overigens niet in beeld is) en de handeling met de gegevens. *Opgave 1a* geeft eerst in vijf zinnen het benodigde materiaal, en daarna met *Schets de situatie, geef een formule ... en bereken daarna ...* de stappen die moeten worden gezet. In *Opgave 1b* worden de tussenstappen niet meer gegeven. Opgave 2 is op soortgelijke wijze opgebouwd. In 2a krijgt de leerling nog een eerste stap in de vorm van een *Aanwijzing: noem de lengte ...*

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

Opgave 1 is bijna geheel in specialistische vaktaal geschreven. Naast de formules en de aanduidingen van punten, de rechthoek en de driehoek, zijn dat ook de rituele formuleringen *Gegeven is de functie ...*, *Op de grafiek ligt een punt ...*; *een punt ...*; *een punt $Q(\neq P)$, met $-3 < p < 0$* , *De projectie van ... op de x-as*. In opgave 2 is meer alledaagse taal gebruikt; de meest specialistische zinsdelen zijn *Bereken met differentiëren...* en *Druk de maximale inhoud uit in a*.

Toon: hoe verhoudt de auteur zich tot de materie en de lezer?

De schrijver is in opgave 1 zakelijk, afstandelijk en nauwkeurig. Dat laatste toont hij in de specifieke vaktaal, waaronder de woorden *exact* en *maximale* in de feitelijke opdracht. In opgave 2 is de afstand kleiner en de toon minder zakelijk: er is sprake van *een stuk karton*, en met de verkleinwoorden *vierkantjes* en *bakje* en de aanspreekvorm *je* komt de schrijver naar de leerling toe. In opgave 2 wordt het woord *exact* niet gebruikt, alsof nauwkeurigheid nu minder belangrijk is.

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

De interne cohesie in opgave 1 gaat van de functie f naar de grafiek van f , naar punt P , naar P' enzovoort. De gebiedende wijs *Schets ...*, *Bereken*, *Druk ... uit* markeert de overgang naar de te ondernemen stappen. In opgave 1a worden die stappen gegeven, in de andere opgaven niet, zij het dat de schrijver met de *Aanwijzing* de opgave 2a van een uitdagende denkactiviteit terugbrengt tot het uitvoeren van een wiskundige activiteit.

3.5 Leren werken met grafieken: een Verslag in 1 vmbo

In paragraaf 3.2 is de opgave met René die een bad neemt geanalyseerd. In deze paragraaf zien we hoe een leerling in gesprek met de docent tot een antwoord komt op de deelvraag b van die opgave. In wiskundevakken hoort zo'n redenering opbouwen en daar verslag van doen onlosmakelijk bij de opgave.

Om tot een correct antwoord te komen op deelvraag b en c zijn redeneerstappen nodig waarbij de leerling op verschillende manieren naar de grafiek moet kijken. In de opgave zijn die stappen verdeeld over b (kijken naar het globale verloop van de grafiek) en c (aflezen van een specifiek punt/tijdstip op de horizontale as). We kunnen zeggen dat vraag b een opstapje is naar vraag c. Uit de analyse van Prenger (2005) blijkt dat alle leerlingen die b correct hebben beantwoord ook c goed hebben. Bij vraag b moet de leerling 'het sneller vollopen van het bad' kunnen koppelen aan de steilheid van de grafiek.

In onderstaand fragment van een interactie tussen docent (D) en leerling (LL) zien we hoe de hardop denkende leerling al redenerend deelvraag b correct oplost met hulpvragen van de docent (Prenger, 2005, p.114 en 115).

| | |
|---|---|
| <p>LL: (leest voor): als ook de koudwaterkraan opengaat loopt het bad sneller vol. waaraan kun je dat zien?</p> <p>LL: uhh.</p> <p>D: wat ga je dan doen?</p> <p>LL: naar deze grafiek kijken.</p> <p>D: ja vertel maar: waar kijk je naar?</p> <p>LL: ik kijk hier naar.</p> <p>LL: kijken hoe je 't kan weten.</p> <p>D: wat gebeurt er dan?</p> <p>LL: eerst loopt deze lijn zo.</p> <p>D: ja.</p> <p>LL: volgens mij is dat de warmwaterkraan en dan gaat 'ie helemaal omhoog.</p> <p>D: ja.</p> <p>LL: dus dat is dan volgens mij de koudwaterkraan.</p> <p>D: jaja waarom denk je dat 't eerste stukje dan de warmwaterkraan is?</p> <p>LL: omdat de koudwaterkraan eh ...die loop ... eh... die loop niet zo lang ... die loopt langzaam.</p> <p>LL: en de... uh... door die warmwaterkraan loopt ... en dan ... eh ... is het bad niet zo snel vol.</p> <p>LL: en door die koudwaterkraan wel.</p> <p>D: jaja en hoe zie je dat nou in de grafiek?</p> <p>LL: eerst is 't water zo vol.</p> <p>LL: en dan eh ... volgens mij moet 't hier de koudwaterkraan gedraaid en dan gaat 't helemaal omhoog.</p> <p>D: jaja.</p> <p>LL: en dan is het denk ik sneller vol.</p> <p>D: hoe kun je zien dat 't sneller gaat dan?</p> <p>LL: omdat 't helemaal naar boven gaat deze lijn.</p> <p>D: jaja maar deze gaat ... als je dit..... dit gaat uiteindelijk toch ook nog wel naar boven als je deze lijn doortrekt?</p> <p>LL: maar deze lijn die is sneller dan.</p> <p>D: oh jaja oké.</p> <p>D: dus wat moeten we nu opschrijven dan?</p> <p>LL: eh doordat de lijn sneller omhoog gaat.</p> | <p>Identificatie</p> <p>Gebeurtenis</p> <p>Conclusie</p> |
|---|---|

Stadia: De tekst opent met het oplezen van en het denken over de deelvraag en de initiërende zet van de leraar (Identificatie). Daarna komt de leerling met soms een zetje van de leraar stap voor stap tot een oplossing (Gebeurtenissen). De tekst sluit af met een Conclusie, een typerende afronding van het **Verslag** bij wiskunde.

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

De leerling en de docent gebruiken heel alledaagse taal: *ik kijk hiernaar, loopt zo, loopt langzaam, sneller*. De woorden *lijn en grafiek* zijn de meest specialistische termen die in dit gesprek worden gehanteerd.

Merk op dat de leerling het steilere stuk van de lijn in de grafiek midden in het gesprek weet te koppelen aan het opendraaien van de koudwaterkraan. Zijn antwoord op vraag b *doordat de lijn sneller omhoog gaat* is bijna specialistisch: vakmatig gebruikt de wiskundige *steil* in plaats van *snel*.

Toon: hoe verhoudt de spreker zich tot de materie en de ander?

De gesprekspartners staan dicht bij elkaar, wat zich onder meer uit in het gebruik van *we* in de laatste vraag van de docent: *dus wat moeten we nu opschrijven dan?*

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

Wat betreft de manier waarop interne samenhang wordt gerealiseerd is dit onmiskenbaar spreektaal, wat zich uit onafgemaakte zinnen en correcties en in de uitspraak *is dat de warmwaterkraan en dan gaat 'ie helemaal omhoog*. Met *'ie* verwijst de leerling naar een deel van de voorliggende grafiek. In spreektaal hoeft dit niet geëxpliciteerd te worden. De leerling pendelt van de situatie, naar de afbeelding en de verwoording van die afbeelding.

3.6 De achthoek: een Verslag in 3 vwo

In paragraaf 3.3 hebben we de opdracht met de achthoek geanalyseerd. In deze paragraaf kijken we naar de wijze waarop een leerling deze opgave heeft gemaakt (zie de [video](#) op YouTube).

Het gesprek vindt plaats nadat de leerling de opdracht heeft gemaakt en met zijn aantekeningen erbij. De manier waarop deze leerling het probleem heeft opgelost, is maar een van de mogelijke manieren waarop dit kan.

| | |
|---|----------------------|
| D: Jasper, je hebt gewerkt aan een speciale eh denkopdracht, ennuh, hoe begon jij eerst, want het ging er uiteindelijk dus om dat je de zijde weet, nou die zijn dan allemaal gelijk, van die achthoek. En jij begon eerst met die oppervlakte uit te rekenen, he? | Identificatie |
| LL: Ja, ik dacht als ik de oppervlakte van die achthoek weet, nou ja, dan kan ik dus met een x een formule voor die oppervlakte doen en dan is die van de achthoek hetzelfde als [die] van [het vierkant] min de oppervlakte van de driehoekjes. En als je de oppervlakte van de driehoekjes weet, kan je omdat ze gelijke a en b hebben kan je dacht ik kan je die andere zijde berekenen. Maar dat eh, dat klopt niet helemaal. | |
| Dan weet je de oppervlakte van de driehoek | Gebeurtenis |
| D: Volgens mij ging het hartstikke goed, want je zei wel van eh, dit [wijst hele vierkant aan] is dan honderd, | |
| LL: Als je dan de oppervlakte van die driehoek weet, dan weet je natuurlijk, door die wortel, dan weet je x en a kwadraat is b kwadraat plus c kwadraat, dan weet je ze allemaal. Maar je komt niet echt helemaal uit de oppervlakte, dan. | |
| D: dus toen ben je het anders gaan aanpakken, en toen had je wel die [wijst aan $10 - 2x$] tien min twee x , en toen zei je en dat zei je inderdaad ook net al, oh ja, toen ging je nog weer goed lezen van ze moeten wel allemaal gelijk aan elkaar zijn. Dus die is gelijk aan die. | |
| LL: Dus als je dan c weet van die driehoek, dan kan ik een vergelijking opstellen, a kwadraat plus b kwadraat is | |
| D: Ja. Dus dat had je hier opgeschreven, en toen kwam je op c is wortel tweemaal x [wijst aan $c = \sqrt{2} \cdot x$]. En dan zie je hier, toen had je hier geschreven, dus tien min $2x$ is wortel 2 maal x [wijst aan $10 - 2x = \sqrt{2} \cdot x$] en toen moest je dat gaan uitrekenen, nou dat ging, want toen, eh, maar toen gingen er ook wat dingen mis, he? | |
| LL: Ja | |
| D: want toen dacht je wel oh ik moet ik de abc-formule daarbij gebruiken want er zit een wortel in of zo? | |
| LL: Ja, er zit natuurlijk geen kwadraat in dus het heeft, is eigenlijk een lineaire vergelijking, dus door de wortel twee staat ie niet mooi. Dus als je dan met haakjes werkt, dat is, dan kom je op gegeven moment uit, eigenlijk een getal waarmee je gewoon x kan uitrekenen. | |
| | |

Stadia: Het gesprek begint met de leraar die verwijst naar de *speciale denkopdracht* en naar de eerste stap die de leerling blijkbaar heeft gezet om tot een oplossing te komen: daarmee is de **Identificatie** afgerond.

Daarna lopen ze samen de **Gebeurtenissen** stap voor stap na. Merk op dat de leerlingen daarbij terugkomt op zijn schreden, maar uiteindelijk de oplossing ziet.

Met het woordje dus, in de laatste alinea, kondigt hij zijn **Conclusie** aan en zegt dat hij dan weet hoe hij de lengte van de zijde kan berekenen. Op het werkblad (zie figuur hieronder) staat namelijk de vergelijking die uiteindelijk tot de gevraagde oplossing kan leiden: $10 - 2x = x\sqrt{2}$. De vergelijking wordt correct opgelost, waarbij de leerling aan de rechterkant een vergelijking noteert van dezelfde vorm, maar zonder de wortel, om de stappen in het oplossingsproces helder te krijgen. $\sqrt{2}$ is vervangen door een 'gewoon' getal, namelijk 7. De stappen rechts zijn aan de linkerkant gekopieerd.

| | |
|--|-----------------------|
| $10 - 2x = x \cdot \sqrt{2}$ | $10 - 2x = x \cdot 7$ |
| $10 = \cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} x (2 + \sqrt{2}) x$ | $10 - 2x = 7x$ |
| $x = 10 : (2 + \sqrt{2})$ | $10 = 9x$ |
| | $x = 10 : 9$ |

Dit is een bekende strategie bij het oplossen van wiskundevraagstukken: focus op de structuur van de uitdrukking, vereenvoudig zo nodig de getallen en richt je op de samenstellende delen, zodat je overzicht krijgt over de te nemen stappen. Dit wordt wel aangeduid als *symbol sense* (Arcavi, 1994).

Veld: in hoeverre zijn de inhoudswoorden alledaags dan wel specialistisch?

De leerling spreekt over *de oppervlakte van de achthoek, de oppervlakte van de driehoekjes, omdat ze gelijke a en b hebben en daar zit geen kwadraat in*. En de leraar spreekt op datzelfde specialistische niveau met hem. Ze zegt bijvoorbeeld *toen kwam je op c is wortel twee maal x*.

Toon: hoe verhoudt de spreker zich tot de materie en de ander?

De gesprekspartners spreken als bijna gelijken met elkaar, al spreekt de leraar de leerling aan met *Jasper* en *je*, en geeft de leerling alleen maar antwoorden. De leraar stelt zich dichtbij de leerling op, onder meer met *ging het hartstikke goed*.

Modus: op welke manier wordt structuur en samenhang in de tekst aangebracht?

De tekst is een typisch voorbeeld van een mondelinge tekst, met de *eh's*, halve zinnen, zelfcorrecties en verwijzingen naar de direct omgeving, zijnde het voorliggende werkblad van de leerling.

4. Suggesties voor de praktijk

In dit laatste hoofdstuk laten we zien hoe de inzichten uit de voorgaande hoofdstukken vertaald kunnen worden naar effectief didactisch handelen: hoe kun je **taalsteun** bieden aan leerlingen die zich het vak en de vaktaal proberen eigen te maken? We doen dit in drie stappen.

- 1 Aandacht voor formuleren in de klas
- 2 De onderwijsleercyclus laat zien wat daarbij belangrijk is: het start met het leggen van een stevige vakinhoudelijke basis, voor er samen wordt gelezen en geschreven.
- 3 We sluiten af met enkele suggesties voor een samenhangend curriculum met betrekking tot redeneren en formuleren bij vak- en leergebieden

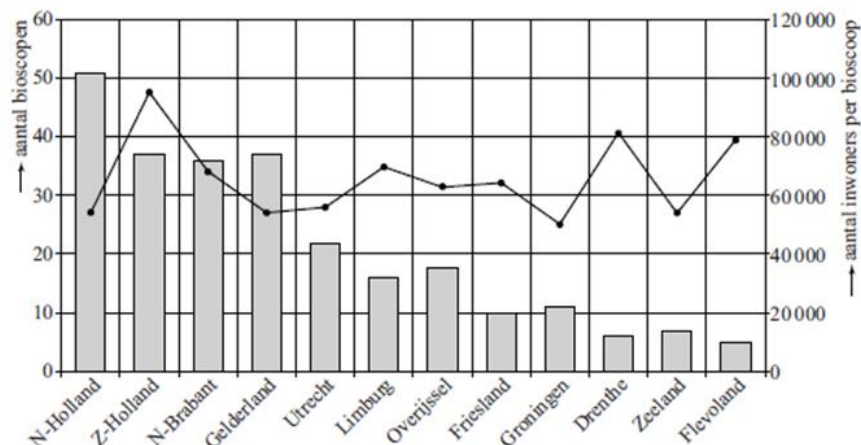
4.1 Aandacht voor formuleren in de klas

In augustus 2015 zijn nieuwe examenprogramma's wiskunde ingevoerd (Peereboom, Tolboom, Vaandrager, Versnel, & Van Wijk, 2015) in havo 4 en vwo. In 2017 werden in het havo op basis daarvan de eerste centrale examens afgenomen. In de examens wiskunde A (en C in het vwo; het eerste CE in 2018) is de zogenaamde **onderzoeksopdracht** opgenomen. Dat is een grotere opdracht, voor een relatief groot aantal scorepunten, waarbij geen tussenvragen worden gesteld. Dat betekent dat er een aanzienlijk beroep wordt gedaan op het probleemoplossend vermogen van de examenkandidaten. En dus ook op hun beheersing van het genre Verslag. Ter illustratie is opgave 22 Bioscoopbezoek weergegeven, uit het CE wiskunde A havo, 2017-1, als een voorbeeld van zo'n zogenaamde onderzoeksopdracht.

Bioscoopbezoek

In de figuur staan gegevens over bioscopen in Nederland in 2012.

figuur



Het staafdiagram geeft het aantal bioscopen per provincie weer (linker verticale as). Het lijndiagram toont het aantal inwoners per bioscoop uitgesplitst per provincie (rechter verticale as).

In de tabel staat per provincie het aantal bioscoopbezoeken in 2012.

tabel

| provincie | bezoeken | provincie | bezoeken | provincie | bezoeken |
|------------|-----------|------------|-----------|-----------|----------|
| N-Holland | 7 532 000 | Utrecht | 2 009 000 | Friesland | 625 000 |
| Z-Holland | 7 298 000 | Overijssel | 1 663 000 | Flevoland | 525 000 |
| N-Brabant | 4 366 000 | Limburg | 1 662 000 | Drenthe | 519 000 |
| Gelderland | 2 695 000 | Groningen | 1 180 000 | Zeeland | 486 000 |

Kees beweert: "In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2."

- 7p 22 Onderzoek over welke provincie Kees het heeft en bereken voor deze provincie of hij gelijk heeft.

Op de volgende pagina is het bijbehorende beoordelingsmodel voor deze opgave weergegeven.

Bioscoopbezoek

22 maximumscore 7

- De provincie met de meeste bioscopen per inwoner is de provincie waar het aantal inwoners per bioscoop het laagst is 1
- Dit is de provincie Groningen 1
- Het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner van Groningen is gelijk aan het totaal aantal bioscoopbezoeken in Groningen gedeeld door het totaal aantal inwoners van Groningen 1
- Aflezen voor Groningen: het aantal bioscopen is 11 1
- Aflezen voor Groningen: het aantal inwoners per bioscoop is 50 000 (met een marge van 1000) 1
- Het totaal aantal inwoners van Groningen is (ongeveer) $(50\,000 \times 11 =) 550\,000$ 1
- Het aantal bezoeken per inwoner is dan ongeveer $1180\,000 : 550\,000 \approx 2,1$ dus Kees heeft gelijk 1

De gemiddelde p-waarde gemeten over dit hele examen was 0,4171². De gemiddelde p-waarde voor opgave 22 is 0,4971. Daaruit kunnen we afleiden dat deze opgave niet moeilijker was dan een gemiddelde andere opgave op dit examen.

In het correctievoorschrift is de meest aannemelijke wiskundige redenering, leidend tot de correcte conclusie, denkstap voor denkstap uitgeschreven. De reden om dit soort opgaven op te nemen in het centraal examen is dat op deze manier het wiskundig denken van de leerling op meer valide wijze wordt getoetst en er minder nadruk ligt op alleen procedurele beheersing van de stof.

Hiermee is in Nederland sinds 1989 ervaring opgedaan in de Wiskunde-A-lympiade³, vanaf 1999 in de Wiskunde-B-dag en vanaf 2012 ook in de Onderbouw WiskundeDag. Leerlingen buigen zich een dag lang in groepjes over een onderzoeksopdracht waarin wiskundig denken een grote rol speelt. Van de route naar hun oplossing moeten zij verslag doen. Dit verslag doet een stevig beroep op de ontwikkeling van hun vaktaal. Deze wiskundeactiviteiten voor teams zijn echter geen verplicht onderdeel van het Nederlandse curriculum.

Het correctievoorschrift is te herkennen als een **Verslag** van een wiskundige denkactiviteit, inclusief de conclusie op het eind. Het correctievoorschrift geeft slechts twee berekeningen: $(50.000 \times 11 =)$ en $1180000 : 550.000 \approx 2,1$, waarvan de eerste voor de toekenning van het punt niet noodzakelijk is. Het correctievoorschrift is voor de rest in woorden opgesteld. Merk op dat het antwoord ook geformuleerd kan worden met gebruikmaking van meer algebraïsche symbolen, als \bar{M} bioscoopbezoeken/inwoner =.

Bij eerder besproken opgaven, bijvoorbeeld die over het verpakings- of optimaliseringsvraagstuk (paragraaf 3.4), hebben we opgemerkt dat in de eerste opgaven vaak gebruik wordt gemaakt van deelvragen en adviezen die (tussen)stappen weggeven. Terwijl later met kortere opgaven wordt gewerkt, waarin de leerling zelf de tussenstappen moet bedenken en zetten.

² Zie toets- en itemanalyse op

http://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens/schriftelijke_examens_havovwo/examens_havovwo_2017/havo_ce_tv1

³ Zie <https://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-a-lympiade>

Door minder tussenstappen weg te geven worden leerlingen in opdrachten die samenwerkend leren bevorderen, extra aangezet tot wiskundige denkactiviteiten en zorgvuldig formuleren. Tussenresultaten kunnen in groepen of klassikaal worden besproken aan de hand van bijvoorbeeld de volgende vragen:

- Welke representaties (grafisch, met symbolen of met woorden) gebruik je wanneer?
- Hoe specialistisch moet een en ander worden geformuleerd?

Het samen praten, schrijven en formuleren kan ook helpen om de verwachtingen van de leraar over de kwaliteit van de uitwerking van de opdracht scherp te krijgen.

4.2 De onderwijsleercyclus

Veelgebruikte manieren om leerlingen te ondersteunen in het leren formuleren, zijn het geven van het goede voorbeeld en voorbeelden van anderen, en het geven van feedback op mondelinge en schriftelijke uitingen van leerlingen.

Minstens zo effectief zijn het **samen lezen** en **samen schrijven**. In de zogenoemde **onderwijsleercyclus** komen deze activiteiten samen en hebben ze een expliciete plaats in een integrale didactische aanpak gericht op een steeds grotere beheersing van het vak en de vaktaal. De onderwijsleercyclus is daarmee een instrument om het leren begrijpen en produceren van vaktaal te integreren in de les. De vaktekst en zijn specifieke kenmerken staat daarbij centraal.

De onderwijsleercyclus kan als volgt schematisch worden weergegeven.



We geven hieronder bij elk van de vier fasen van de onderwijsleercyclus een korte algemene omschrijving. Fries & Meestringa (2017) geven een beschrijving van het gebruik van de cyclus in de scheikundeklas. De leraar kan naar behoefte elke fase afwisselend extra aandacht geven. Wij beginnen links boven.

Het opbouwen van de context

Teksten gaan ergens over (het veld) en ze functioneren in een bepaalde context. Dat betekent dat op zijn minst een deel van die context bekend verondersteld wordt en daarom niet expliciet vermeld wordt. Om de tekst goed te begrijpen, moet de lezer dan twee dingen doen:

1. **Kennis van het onderwerp en de context daarvan activeren.** Immers: hoe meer je al van het onderwerp weet, hoe makkelijker je de tekst zult begrijpen.
2. **Doel van de tekst in die context bepalen.** Om de betekenis van een tekst op waarde te schatten moet de lezer ook doorzien wat het doel van de tekst is binnen de specifieke communicatieve context. In de onderwijscontext hebben teksten doorgaans de functie vakkennis uit te wisselen: de leerling *leest* een tekst dus om vakkennis op te doen; beschrijvingen en verklaringen te krijgen en procedures te leren uitvoeren, hij *schrijft* een tekst om zijn opgedane vakkennis voor zichzelf vast te leggen en vaak ook om die te laten zien aan de leraar.

Modeling van de analyse

De leraar ondersteunt het lezen van zijn leerlingen door zijn eigen leesgedrag te modelen: hij doet hardop denkend voor hoe hij de tekst stap voor stap analyseert op een of meerdere van bovengenoemde aspecten.

De leraar kan dat als volgt doen.

- Knip de tekst van te voren op in afzonderlijke tekstblokken, die de stappen die de tekst doorloopt te laten zien.
- Maak met verschillende kleuren deze opbouw van de tekst inzichtelijk.
- Laat hardop denkend zien hoe je in de tekst het doel van de tekst herkent.

Begeleide inoefening

De leraar kan de overgang naar productie van vaktaal ondersteunen door afgestemde oefeningen met veel begeleiding, bijvoorbeeld door de leerlingen samen vakteksten te laten formuleren.

Extra steun is mogelijk met varianten:

- eerst mondeling en dan schriftelijk laten formuleren;
- als leraar samen met de hele klas vakteksten formuleren, bijvoorbeeld de antwoorden op vakmatige redeneervragen
- eerder gegeven antwoorden met de klas stap voor stap optimaliseren tot een antwoord dat voldoet.

Zelfstandig schrijven en reflecteren

In de onderwijsleercyclus produceren leerlingen ook zelfstandig vakteksten. Vaak is dat een uitgeschreven antwoord op een redeneervraag. Zo'n Verslag is vaak niet in een keer goed en kan dus worden verbeterd. Via reflectie op een kunnen leerlingen tot verbetering komen.

4.3 Naar een samenhangend curriculum

Samenhang van de wiskundevakken met andere vakken

Het komt leerlingen ten goede als de manier waarop over vaktaal wordt gesproken in de diverse vakgebieden en domeinen vergelijkbaar is en op vergelijkbare wijze wordt ingezet in de lessen. Bij andere vakken spelen andere genres een hoofdrol, maar er is samenhang mogelijk in de manier waarop gesproken wordt over doelen van teksten, de opbouw daarvan en de betekenis van de keuze uit de verschillende mogelijkheden die de taal op de registerdimensies biedt.

Bij alle vakken geldt voor leerlingen dat zij zich bedienen van academisch taalgebruik en zich ontwikkelen op de drie dimensies van het vakregister: veld, toon en modus (zie paragraaf 1.1).

Dat laat zich samenvatten in de volgende adviezen:

- Laat je kennis zien in het presenteren en interpreteren (specialist)
- Wees zelfverzekerd in je verslagen, interpretaties en beoordelingen (expert)
- Structureer je tekst zodat de interpretatie ervan gemakkelijk is (schriftelijk).

Docenten Nederlands kunnen hiervoor een basis leggen. Leerlingen leren daar een metataal over taal in vakcontexten hanteren die in andere contexten en bij de andere vakken worden uitgewerkt.

Verschillen tussen leerlingen en kansen voor vaktaal

De complexiteit van opdrachten, met een beroep op vaktaal, neemt in de schoolcarrière van leerlingen toe. Het is wenselijk dat in een doorlopende lijn wordt toegewerkt naar de verwachtingen van de examens. Uit de PISA-analyse (Van der Hoeven et al., 2017) komt naar voren dat vmbo-leerlingen weinig in concepten en contexten werken. Ook voor deze leerlingen is het kunnen interpreteren en verklaren van de wereld om hen heen belangrijker dan het reproduceren van kennis. Wiskundig redeneren door te lezen, praten en schrijven over bijvoorbeeld berekeningen, modellen en representaties volgens de modelleercyclus is ook voor hen van belang en wellicht kan daarmee al in het primair onderwijs worden begonnen.

Referenties

Literatuur

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(4), 4-8.
- Fries, H. & Meestringa, T. (2017). Redeneren bij scheikunde en bij andere vakken. Aan het werk met formuleren! *NVOX* 42 (3), p. 174-175.
- Hajer, M. & Meestringa, T. (2015). *Handboek taalgericht vakonderwijs*. Bussum: Coutinho.
- Hoeven, M. van der, et al., (2017). *Leerplankundige Analyse PISA 2015*. Enschede: SLO.
- Leeuw, B. van der & Meestringa, T. (2014). *Genres in schoolvakken; Taalgerichte didactiek in het voortgezet onderwijs*. Bussum: Coutinho.
- Peereboom, H., Tolboom, J. L. J., Vaandrager, P., Versnel, P., & Van Wijk, P. (2015). *Veranderd wiskundeonderwijs: Gevolgen van de invoering nieuwe examenprogramma's augustus 2015*. Enschede: SLO.
- Perenet, J. & Zwaneveld, B. (2011). Diversiteit in representatie van de wiskundige modelleercyclus bij studenten en docenten. *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen* 28 (2011) nr. 1, 49-74.
- Streun, A. van (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Enschede: SLO.
- Streun, A van & Kop, P. (2016). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten; bovenbouw havo-vwo*. Enschede: SLO.
- Streun, A. van, & Kop, P. (2017). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten; onderbouw havo-vwo*. Enschede: SLO.
- Streun, A. van, & Tolboom, J. L. J. (2017). Alleen reproduceren of ook wiskundig denken? *Euclides*, 93(1), 32-36.

Gebruikt lesmateriaal

- Bruijn, I. de, e.a. (2013). *Moderne wiskunde 2A, havo/vwo deel 1*. Groningen: Noordhoff.
- Dijkhuis, J., e.a. (nog te verschijnen). *Getal en ruimte, havo wiskunde B, deel 1*. Groningen: Noordhoff.

Bijlage Veelvoorkomende genres

| Familie | Genre | Doel | Stadia |
|------------|---------------------|--|--|
| Verhalend | Vertelling | Persoonlijke ervaring vertellen | Oriëntatie ^ Ervaringen (^ Persoonlijk commentaar) |
| | Verhaal | Gevoelens delen en/of gedrag beoordelen | Oriëntatie ^ Complicatie ^ Oplossing (^ Evaluatie) |
| Feitelijk | Verslag | Gebeurtenis beschrijven | Identificatie ^ Gebeurtenissen |
| | Beschrijving | Zaak of gebeurtenis specificeren en classificeren | Identificatie ^ Specificatie |
| | Verzoek | Iemand motiveren tot handelen | Identificatie ^ Specificatie ^ Oproep |
| | Procedure | Beschrijven hoe te handelen | Doel ^ Benodigd materiaal ^ Stapsgewijze instructie |
| | Verklaring | Gebeurtenis uitleggen en interpreteren | Identificatie van het fenomeen ^ Verklaring van de sequentie |
| Waarderend | Beschouwing | Kwestie vanuit verschillende perspectieven onderzoeken | Kwestie ^ Perspectieven ^ Positie |
| | Betoog | Stelling beargumenteren | Stelling ^ Argumenten ^ Bevestiging van de stelling |
| | Respons | Reageren op een cultuuruiting | Oriëntatie ^ Beschrijving ^ Evaluatie |

Als landelijk kenniscentrum leerplanontwikkeling richt SLO zich op de ontwikkeling van het curriculum in het primair, speciaal en voortgezet onderwijs in Nederland. We werken met het onderwijsveld aan de doelen, kaders en instrumenten waarmee scholen hun opdracht vanuit een eigen visie kunnen vervullen.

We brengen praktijk, beleid, maatschappelijke ontwikkelingen en onderzoek samen en stellen onze expertise beschikbaar aan onderwijs en overheid, bijvoorbeeld in de vorm van leerplannen, tools, voorbeelddesmaterialen, conferenties en rapporten.





Hoofdlocatie
Piet Heinstraat 12
7511 JE Enschede

Nevenlocatie
Aidadreef 4
3561 GE Utrecht

Postadres
Postbus 2041
7500 CA Enschede

T 053 484 08 40
E info@slo.nl
www.slo.nl

 [company/slo](https://www.linkedin.com/company/slo)
 [SLO_nl](https://twitter.com/SLO_nl)