Getallen maken & Magische vierkanten
Voor de docent

Vak(gebied)	Rekenen-wiskunde
Schooltype / afdeling	Primair Onderwijs
Leerjaar	Groep 6/7/8
Tijdsinvestering	3 afzonderlijke activiteiten
Vakinhoud	Combinatoriek (bij Getallen maken) Getalpatronen en -relaties (Magische vierkanten)
Kerndoelen	*23*: De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken. *24*: De leerlingen leren (…) formele rekenwiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven. *25*: De leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van rekenwiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.
Uit de karakteristiek	In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.
21^{e} eeuwse vaardigheid	Probleemoplossend denken en handelen
Bronnen	• Gravemeijer, K. (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21^{e} eeuw* (oratie). Utrecht: Universiteit Utrecht. • Gravemeijer, K. (2015). Rekenen met perspectief. Wat leerlingen moeten kunnen in de 21e eeuw. *Volgens Bartjens, 34*(5), pg. 4-7 • Kolovou, A. (2011). *Mathematical problem solving in primary school* (proefschrift). Utrecht: Universiteit Utrecht
Bijlage	Leerlingenmateriaal (vanaf p. 7)

Probleemoplossen in relatie tot rekenen-wiskunde

In deze opdrachten staat de vaardigheid probleemoplossend denken en handelen centraal. Wat een rekenwiskundige probleemopgave is, is relatief. Opgaven die in het voortgezet onderwijs op een standaardwijze, bijvoorbeeld een algebraïsche werkwijze, kunnen worden opgelost, kunnen in het basisonderwijs, waar kinderen die stadaardaanpak nog niet op hun repertoire hebben, fungeren als probleemopgave. Algemeen gesteld wordt wel gesproken over niet-routinematig oplosbare opgaven (zie bv. Kolovou, 2011).

Meer algemene informatie (zonder vakinhoud) over deze 21e eeuwse vaardigheid is te vinden via de website http://curriculumvandetoekomst.slo.nl/21e-eeuwse-vaardigheden (zie o.a. het voorbeeldmatig leerplankader voor probleemoplossend denken en handelen).

Bij leren probleemoplossen moet de leerling de gelegenheid krijgen om zelf een oplossingswijze, een aanpak te bedenken, aangezien dat een wezenlijk aspect is van probleemoplossen. Dat betekent dat de leerkracht niet uitlegt of voordoet hoe het probleem moet worden aangepakt, maar het (wiskundig) denken nadrukkelijk aan de leerlingen laat. De leerkracht moet daarvoor ook weten wanneer hij of zij zelf beter niks kan zeggen, of beter vragen kan stellen die niet het antwoord op een opgave vereisen, maar het denken van de leerling verder op gang helpen en houden. Gravemeijer (2001; 2015) spreekt in dit verband van een ander 'didactisch contract' tussen leerlingen en leerkracht.

Toelichting op de activiteiten

Lesverloop

Hieronder worden drie afzonderlijke activiteiten beschreven: getallen maken, magisch vierkant en magisch vierkant met breuken. Het gaat in alle drie de gevallen om probleemopgaven, waarbij de opgaven wel verschillen, maar het lesverloop vergelijkbaar kan zijn:

1. De leerkracht vertelt dat het leerdoel is *leren probleemoplossen.* Het kan goed zijn vooraf met de leerlingen te bespreken dat de leerkracht geen precieze instructie geeft over hoe een probleem moet worden opgelost, maar dat de leerlingen daar juist zelf over gaan nadenken.
2. De leerkracht legt de probleemopgave voor en vraagt of de opdracht duidelijk is. Een mogelijkheid is één of enkele leerlingen de opdracht in 'eigen woorden' te laten herhalen.
3. Leerlingen gaan in tweetallen of groepjes aan het werk. De leerkracht loopt langs om de aanpakken te observeren. Afhankelijk van het verloop, onderbreekt de leerkracht af en toe het denken van de leerlingen om klassikaal even stil te staan bij bijvoorbeeld:
   - een vraag die in veel groepjes naar voren komt;
   - een kansrijke aanpak of goede inval van een groepje.

   In de try-out van deze opdrachten bleek dat dit de moeilijkste lesfase is voor zowel de leerkracht als de leerlingen. Leerlingen hebben de neiging om als zij 'er niet uit komen' te vragen aan de leerkracht hoe zij het moeten oplossen en leerkrachten zijn geneigd om op zulke vragen te reageren met een uitleg van een mogelijke aanpak. Dit is ook een gangbaar 'didactisch contract' in veel reken-wiskundelessen. Als leerkracht en leerlingen dit zo gewend zijn, kan het moeilijk zijn daarvan af te stappen. Wat daarbij kan helpen is:
   - dit expliciet te maken, niet alleen voorafgaand aan de les, maar ook gedurende de les ('Je stelt me een vraag. Wil je een antwoord van mij of ben je hierover zelf aan het nadenken?')
   - leerlingen consequent denktijd te geven (als leerkracht niet te snel gaan praten).
4. Bij de afsluiting van de activiteit mogen verschillende groepjes hun (verschillende) aanpak presenteren. Daarbij checkt de leerkracht doorlopend of alle leerlingen het gepresenteerde begrijpen (zie ook: uitvoering van de opdracht), parafraseert zo nodig aanpakken en stelt de vraag aan de orde in welke gevallen deze aanpak ook zou kunnen worden gevolgd.

Getallen maken

Deze opgave bestaat uit vier deelopgaven. In de activiteit zoals hier bedoeld (als voorbeeld om in de klas aandacht te besteden aan de vaardigheid probleemoplossend denken en handelen) ligt de nadruk op de d-opgave.
Aan de leerlingen wordt in de a-vraag gevraagd om eerst vier verschillende getallen te maken met de gegeven cijfers. De formulering 'maak' suggereert dat er cijfers moeten worden gecombineerd, maar natuurlijk is een antwoord als 7 of 2 ook goed, net als 12 of 421.
Bij de b- en c-vraag hangt het er vanaf of alle cijfers worden gebruikt of niet. Het kleinste getal (van één cijfer) dat kan worden geschreven is 1. Het kleinste getal dat met twee cijfers gemaakt kan worden gemaakt is 12. Het kleinste getal dat kan worden gemaakt met alle vier de cijfers is 1247.

Het is *niet* nodig om vooraf een randvoorwaarde te geven als ‘alle 4 de cijfers moeten worden gebruikt’. Integendeel: dat het antwoord afhangt van de interpretatie van de vraag is hier een van de leermomenten. Mocht een leerling vooraf de vraag stellen of je alle cijfers moet gebruiken, reageer dan in eerste instantie met een tegenvraag: ‘Maakt dat wat uit voor het antwoord?’ Ook bij de d-vraag hangt het er vanaf of alle cijfers worden gebruikt of niet.

Magisch vierkant

Een magisch vierkant is een vierkant waarin getallen op zo'n manier worden geplaatst, dat wanneer je de getallen in een rij, kolom of diagonaal optelt er steeds hetzelfde antwoord uitkomt. In deze activiteit gaat het om een vierkant van drie bij drie waarin de getallen 1 tot en met 9 moeten worden geplaatst.

Magisch vierkant met breuken

Dit is een vervolgactiviteit op het eerdere magisch vierkant. Het principe is hetzelfde, alleen nu moet de volgende getallenreeks in een vierkant van negen vakjes worden geplaatst: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 3.

Praktisch gezien kan er bij het Magisch vierkant en het Magisch vierkant met breuken op drie manieren te werk worden gegaan:

- Op papier, al dan niet met voorgedrukte vierkanten. Het voordeel hiervan is dat verschillende keren opnieuw kan worden begonnen en dat eerdere pogingen zichtbaar blijven. Dat maakt wat van het verloop van het oplossingsproces zichtbaar en verschaft zodoende informatie aan de leerkracht.
- Met losse kaartjes waarop de getallen staan. Dit heeft als voordeel dat er met de kaartjes snel kan worden geschoven. Dat kost minder tijd dan opschrijven, wat vooral bij het vierkant met breuken een voordeel kan zijn.
- Op rekenweb (http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03008/) kan het magisch vierkant digitaal worden opgelost. Hier staat al wel het totaal '15'gegeven.

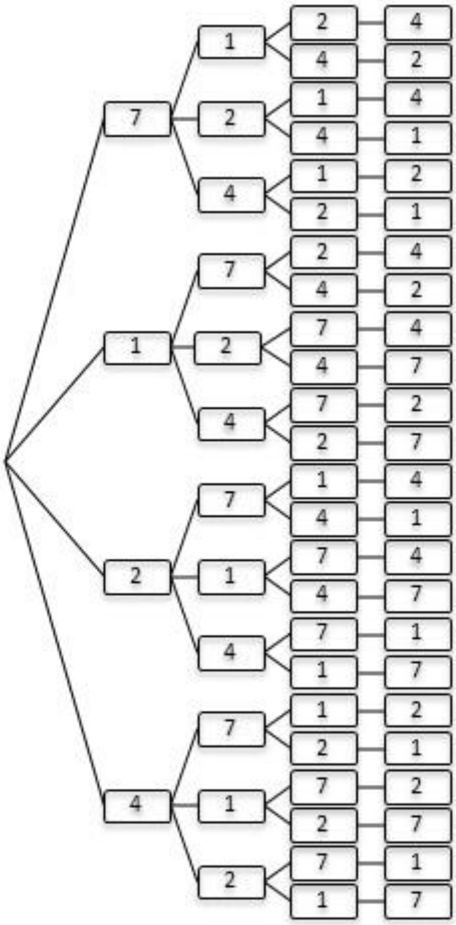
Antwoordmodel Getallen maken

a. Verschillende antwoorden mogelijk.

b. Het kleinste getal dat kan worden geschreven is 1. Het kleinste getal dat kan worden gemaakt met twee cijfers is 12. Het kleinste getal dat kan worden gemaakt met alle vier de cijfers is 1247.
De achterliggende wiskundige structuur is dat je het cijfer met de kleinste waarde (1) positioneert op de plaats met de grootste positiewaarde (duizendtallen) en/of het aantal positiewaarden beperkt (tot één – alleen de eenheden, of tot twee, eenheden en tientallen).

c. Het grootste getal dat kan worden gemaakt ongeacht de randvoorwaarden, is 7421.
Analoog aan de vorige vraag is de achterliggende wiskundige structuur hier dat je het cijfer met de grootste waarde (7) plaatst op de positie met de grootste positiewaarde (de duizendtallen).

d. Als alle vier de cijfers moeten worden gebruikt, is het antwoord als volgt te bepalen: op de eerste positie kunnen vier cijfers worden geplaatst, op de tweede positie kunnen de drie overgebleven cijfers nog worden geplaatst, op de derde positie de overgebleven twee cijfers, en op de vierde positie alleen nog het laatste overgebleven cijfer. De formele berekening die hierbij hoort is $4 \times 3 \times 2 \times 1$, oftewel 24 mogelijke getallen. Voor leerlingen in de basisschoolleeftijd zal dit op model-ondersteund niveau moeten worden verduidelijkt, bijvoorbeeld met het boomdiagram, waarin zowel de vermenigvuldigstructuur kan worden herkend, als alle mogelijke combinaties kunnen worden afgelezen:



Het boomdiagram is een verkorte notatie van het systematisch opschrijven van alle antwoordmogelijkheden. Er wordt dus een denkstap weggelaten en dat betekent dat de tijd moet worden genomen om het boomdiagram op te bouwen. Het is duidelijker als de leerkracht hardop denkend het boomdiagram tekent dan wanneer het boomdiagram kant-en-klaar wordt gepresenteerd. Wat kan helpen is het probleem kleiner te maken, dus bijvoorbeeld eerst alle mogelijkheden te noteren van een getal met drie cijfers, en daar vervolgens een boomdiagram bij te tekenen.

Als niet alle vier de cijfers hoeven te worden gebruikt, wordt het berekenen van het aantal mogelijkheden iets ingewikkelder. Er is dan een extra mogelijkheid; namelijk dat er géén cijfer aan een positiewaarde wordt toegekend. Het eenvoudigst is het om de mogelijkheden met vier cijfers, met drie cijfers, met twee cijfers en met één cijfer op een rijtje te zetten en deze deelantwoorden samen te voegen.
Dus voor een getal met vier cijfers: 24 mogelijke getallen, voor een getal met drie cijfers: $4 \times 3 \times 2 = 24$ mogelijkheden (weer), voor een getal met twee cijfers: $4 \times 3 = 12$ mogelijkheden, en voor een getal met één cijfer: 4 mogelijkheden. Dit levert op: $24 + 24 + 12 + 4 = 64$ mogelijke getallen.

Antwoordmodel Magisch vierkant

Een correct ingevuld magisch vierkant ziet er bijvoorbeeld zo uit (de getallen kunnen ook gespiegeld of gekanteld zijn ingevuld):

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Leerlingen beginnen dit probleem vaak op te lossen via *trial and error*. Daarbij kunnen ze allerlei structuren tegen komen die vervolgens stappen in het oplossingsproces worden. Zulke stappen in het oplossingsproces kunnen onder meer zijn:

- Alle getallen bij elkaar opgeteld leveren 45 op. Verdeeld over drie rijen is dat 15; dus de som van alle rijen (en kolommen en diagonalen) moet steeds 15 zijn.
- Er kan eerst worden geprobeerd om alle rijen opgeteld 15 te laten opleveren, dan zó met de getallen te schuiven dat dat ook bij de kolommen het geval is, en ten slotte te kijken naar de diagonalen.
- Als je alle getallen 1 tot en met 9 op een rij zet, staat 5 in het midden. De getallen daaromheen vormen steeds setjes van 10 (1 en 9, 2 en 8, 3 en 7, 4 en 6). Die kunnen dus om de 5 heen in het vierkant worden geplaatst (en de 5 moet in het midden).
- Het getal 5 vormt met vier andere setjes getallen steeds 15. Alleen het getal in het midden van het vierkant komt vier keer in een optelling voor (in één rij, één kolom, en twee diagonalen). Dus 5 moet in het midden.
- De even getallen vormen elk met drie andere setjes getallen steeds 15 (bijvoorbeeld 2 met 9 en 4, met 5 en 8, en met 7 en 6) en moeten dus in de hoekpunten (want die komen drie keer in een optelling voor: in één rij, één kolom en één diagonaal).
- De oneven getallen vormen elk met maar twee andere setjes getallen steeds 15 (bijvoorbeeld 9 met 2 en 4, en met 5 en 1), dus deze moeten aan de zijkanten in het midden (want die komen maar twee keer in een optelling voor: in één rij en in één kolom).

Antwoordmodel Magisch vierkant breuken

Deze variant is geschikt voor de betere rekenaars en/of als vervolgopdracht. De mogelijke denkstappen zijn hetzelfde als bij het eerste magisch vierkant, en daar komt bij dat sommige leerlingen al snel de relatie met het eerste vierkant zien: alle getallen zijn door 3 gedeeld. Dat is beter herkenbaar als alle gemengde getallen als onechte breuk worden opgeschreven (zie het tweede vierkant hieronder).

$\frac{2}{3}$	3	$1\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	1
2	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{3}$
$\frac{6}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

Makkelijker en moeilijke maken van de opdrachten

Zowel Getallen maken als Magisch vierkant kunnen eenvoudig makkelijker en moeilijker worden gemaakt.

Bij Getallen maken kunnen er meer of juist minder cijfers worden gebruikt om te combineren tot getallen. In principe kunnen dit soort combinatorische problemen in alle groepen worden aangeboden, al is het werken met bijvoorbeeld het boomdiagram voorbehouden aan de bovenbouw. Maar al bij de kleuters kan bijvoorbeeld de vraag worden voorgelegd hoeveel verschillende vlaggen met twee gekleurde banen kunnen worden gemaakt met drie kleuren (waarbij de opdracht wordt uitgevoerd met tekenen en kleuren of met knippen en plakken. Het gaat dan om vragen als 'Heb je alle mogelijke vlaggen getekend?', 'Hoe weet je dat?').

Het Magisch vierkant kan op verschillende manieren worden gevarieerd, bijvoorbeeld:

- Het kan makkelijker worden gemaakt door bijvoorbeeld aan te geven dat het totaal van de rijen, kolommen en diagonalen steeds 15 is of door een of twee getallen al in het vierkant te plaatsen.
- Door elk getal in het vierkant met deelfde factor te vergroten of verkleinen, ontstaat een nieuw magisch vierkant. Dat is in feite ook gebeurd met het vierkant met de breuken: elk getal uit het eerste magische vierkant is gedeeld door 3.
- Leerlingen kunnen zelf magische vierkanten ontwerpen en elkaars vierkanten oplossen.

Getallen maken

Doel

Getallen kun je opschrijven in woorden (zes) en met cijfers (6). In deze opdracht gaat het om getallen opschrijven met cijfers. Je leert wat over het oplossen van *combinatieproblemen*.

Drie dingen om aan te denken

Je gaat straks samenwerken in tweetallen. Luister goed naar elkaar en zorg ervoor dat je elkaar snapt.

1. Het gaat bij deze opdracht niet alleen om het antwoord, maar vooral ook om de manier om het antwoord te vinden.
2. Fouten maken geeft niet. Van fouten kun je juist leren.

Inleiding

Let op het verschil tussen *cijfers* en *getallen*.
We hebben tien *cijfers*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0.
Getallen kun je opschrijven met één of meer cijfers. We hebben oneindig veel getallen, bijvoorbeeld: 0, 1, 549, 63 en 271508.

Alleen:

Maak opgave a tot en met c hieronder.
Je mag daarbij alléén de cijfers gebruiken die genoemd worden.

a) Maak vier verschillende getallen met de volgende cijfers:
   - 7
   - 1
   - 2
   - 4

b) Wat is het kleinste getal dat je met deze cijfers kunt maken?

c) Wat is het grootste getal dat je met deze cijfers kunt maken?

In tweetallen:

Vergelijk je antwoorden. Wat hebben jullie hetzelfde geantwoord en wat verschillend? Hoe komt dat?

Met de hele klas:

Bij welke vragen zullen veel kinderen hetzelfde hebben geantwoord en bij welke vragen zullen veel kinderen verschillend hebben geantwoord? Hoe zou dat komen?

Werk in tweetallen: een combinatieprobleem

d) Hoeveel verschillende getallen kun je maken met deze cijfers (7; 1; 2 en 4)?
   Schrijf alle combinaties op.

Magisch vierkant

Doel

Met getallen valt er veel te puzzelen. Met deze opdracht leer je wat over *probleemoplossen* met het magisch vierkant met hele getallen en over getalrelaties.

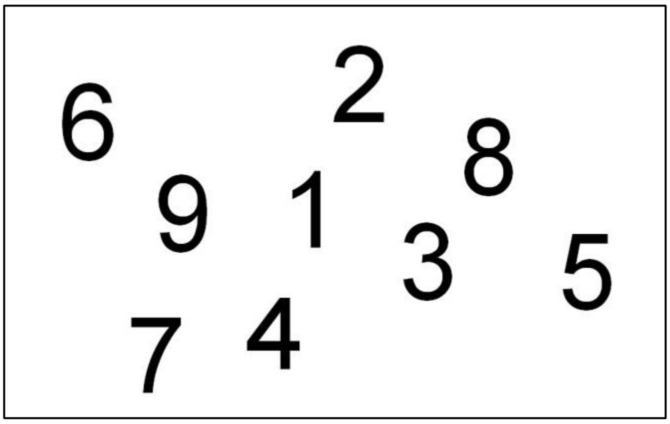
Drie dingen om aan te denken

1. Fouten maken is niet erg, je leert juist van fouten maken.
2. Je leert ook van: aan iemand anders vertellen wat je doet en denkt.
3. Je leert ook van: luisteren naar wat iemand anders doet en denkt.

Opdracht

Plaats de getallen 1 tot en met 9 zó in een vierkant met 9 hokjes, dat:

- als je de getallen per rij optelt, er steeds hetzelfde uitkomt;
- als je de getallen per rij optelt én als je de getallen per kolom optelt, er steeds hetzelfde uitkomt;
- als je de getallen per rij optelt én als je de getallen per kolom optelt én als je de getallen van de twee diagonalen optelt, er steeds hetzelfde uitkomt.



Magisch vierkant met breuken

Doel
Met getallen valt er veel te puzzelen. Met deze opdracht leer je wat over *probleemoplossen* met het magisch vierkant met breuken en over relaties tussen breuken en hele getallen.

Drie dingen om aan te denken
1. Fouten maken is niet erg, je leert juist van fouten maken.
2. Je leert ook van: aan iemand anders vertellen wat je doet en denkt.
3. Je leert ook van: luisteren naar wat iemand anders doet en denkt.

Opdracht
Plaats de getallen uit het vak hieronder zó in een vierkant met 9 hokjes, dat:
als je de getallen per rij optelt, er **steeds** hetzelfde uitkomt;
- als je de getallen per rij optelt én als je de getallen per kolom optelt, er steeds hetzelfde uitkomt;
- als je de getallen per rij optelt én als je de getallen per kolom optelt én als je de getallen van de twee diagonalen optelt, er steeds hetzelfde uitkomt.

$\frac{2}{3}$ $1\frac{2}{3}$ 3 $2\frac{2}{3}$

1 2

$1\frac{1}{3}$ $2\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

